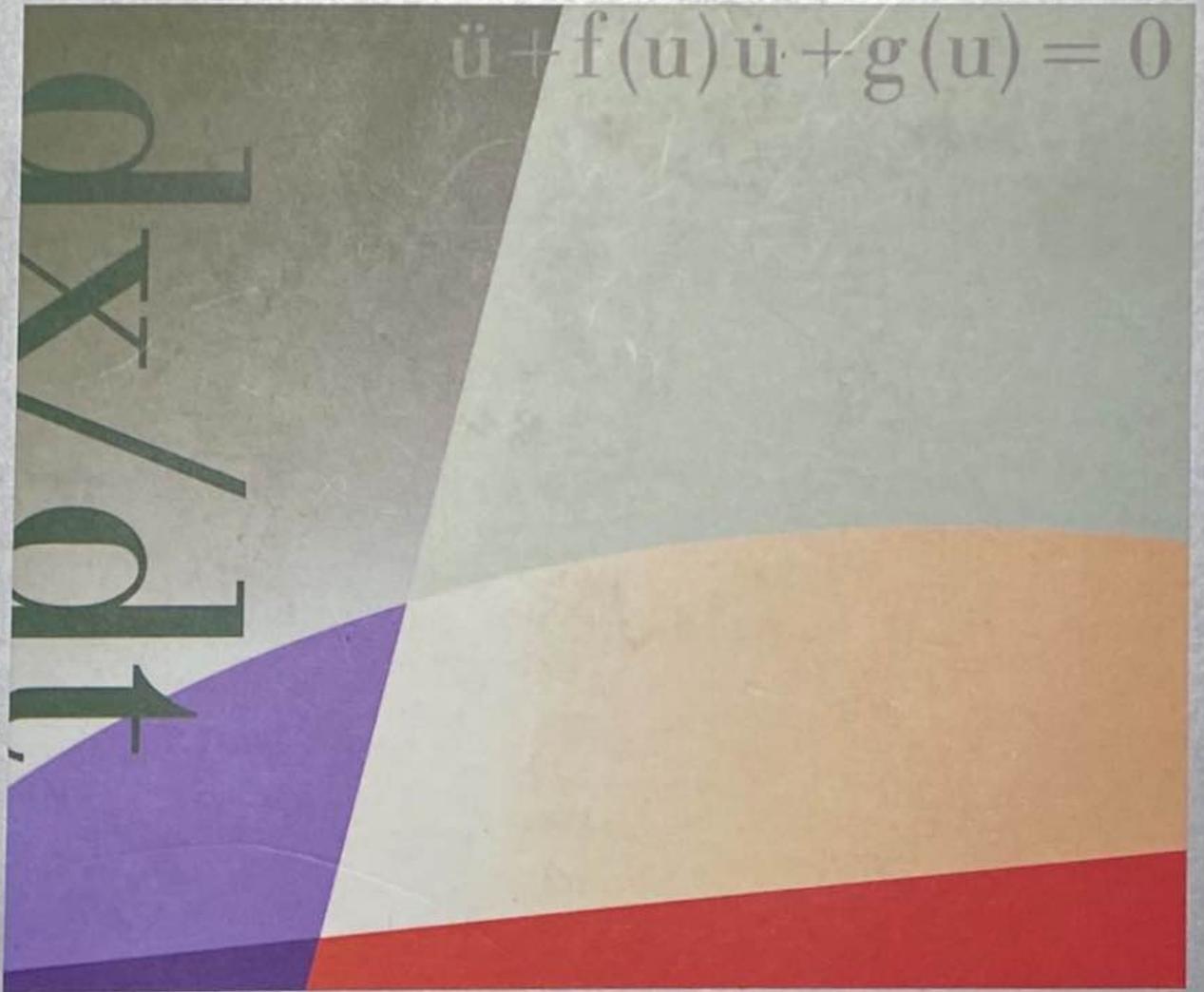


COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

Equações Diferenciais Aplicadas



Djairo Guedes de Figueiredo
Aloisio Freiria Neves

6

Sistemas Autônomos no Plano

Este capítulo pertence à teoria qualitativa das equações diferenciais. Aqui, não se insiste na obtenção de expressões exatas para as soluções dos problemas. A ênfase é, antes em se obter propriedades das soluções, retirando-as através de uma análise das equações. A parte técnica está dividida em duas seções. A seção 6.1 desenvolve a matemática essencial para o estudo de problemas no plano de fase, com resultados de caráter local. A seção 6.2, estuda o teorema de Poincaré-Bendixon, e entra na difícil linha de obtenção de informações globais sobre o espaço de configurações de sistemas não lineares. O texto expõe os conceitos, as idéias envolvidas, e as consequências dos resultados, sem incluir uma demonstração do teorema de Poincaré-Bendixon.

Propomo-nos estudar neste capítulo sistemas na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (6.1)$$

que são denominados sistemas *autônomos*, pois f e g não dependem explicitamente da variável (tempo) t . As soluções $(x(t), y(t))$ são curvas parametrizadas no plano de fases (x, y) denominadas *órbitas*. O sentido geométrico do sistema (6.1) é o seguinte: $(f(x, y), g(x, y))$ é um campo vetorial no plano [suporemos que $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 definidas em todo o plano] e as órbitas são as curvas integrais desse campo, isto é, as curvas que em cada ponto são tangentes ao campo.

6.1. Consequências do Teorema de Existência e Unicidade

Como vimos na seção 3.2 devemos olhar os gráficos das soluções $t \rightarrow (x(t), y(t))$ em $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, t)\}$; a hipótese de f e g serem de classe C^1 garante que, para qualquer (x_0, y_0, t_0) existe uma e somente uma solução $(x(t), y(t))$ do sistema (6.1), tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, veja Figura 6.1(a). O sistema (6.1) sendo autônomo, segue-se imediatamente que, caso $(x(t), y(t))$ seja uma solução de (6.1) e t_1 seja um número fixado, então $(x_1(t), y_1(t)) = (x(t - t_1), y(t - t_1))$ será também solução de (6.1). De fato, temos:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t - t_1) = f(x(t - t_1), y(t - t_1)) = f(x_1(t), y_1(t))$$

e uma expressão semelhante para $y_1(t)$. Isso mostra que, se trasladarmos uma solução de (6.1) paralelamente ao eixo t , obtemos ainda uma solução de (6.1), veja Figura 6.1(b)

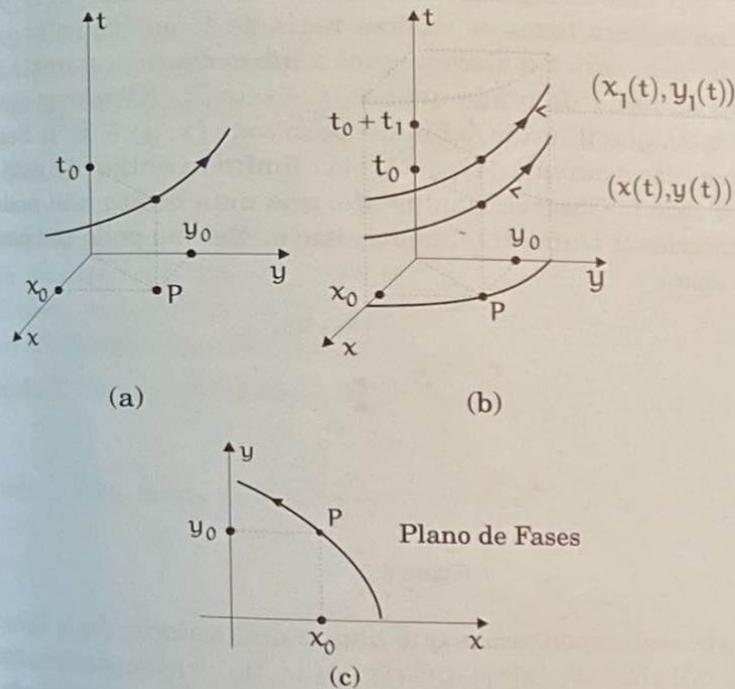


Figura 6.1

Isso mostra que uma reparametrização de $(x(t), y(t))$ conduz à mesma órbita (curva) no plano de fases (x, y) veja Figura 6.1(c). Podemos portanto considerar condições iniciais (x_0, y_0, t_0) com $t_0 = 0$. A seguir, provamos que *órbitas não se interseccionam no plano de fases*. Suponha que existem duas órbitas $(x_1(t), y_1(t))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ tais que $(x_1(\hat{t}), y_1(\hat{t})) = (x_2(\bar{t}), y_2(\bar{t}))$; pelo que acabamos de mostrar, vemos que

$$(x(t), y(t)) = (x_1(t + \hat{t} - \bar{t}), y_1(t + \hat{t} - \bar{t}))$$

é solução de (6.1), e como

$$(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = (x_1(\hat{t}), y_1(\hat{t})) = (x_2(\bar{t}), y_2(\bar{t}))$$

concluimos do teorema de Existência e Unicidade (secção 3.2) que $(x(t), y(t)) = (x_2(t), y_2(t))$, o que mostra que $(x_2(t), y_2(t))$ é uma reparametrização de $(x_1(t), y_1(t))$. Observe que os resultados da secção 3.2 implicam na seguinte alternativa: (i) as órbitas $(x(t), y(t))$ estão definidas para todos os valores reais de t , ou (ii) $(x(t), y(t))$ não está definido para t maior ou igual a um certo ω_+ , e neste caso $(x(t), y(t))$ se torna ilimitado quando $t \rightarrow \omega_+$. [Observe que as funções $f(x, y)$, $g(x, y)$ estão definidas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$]. Segue-se, pois, que caso a curva $(x(t), y(t))$ seja limitada então ela está definida para todo t . Observe, finalmente, que uma órbita não pode se auto-interseccionar transversalmente, isto é, ela não pode ter pontos duplos do tipo:

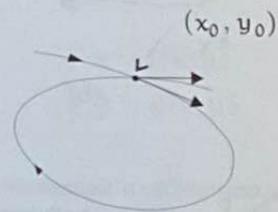


Figura 6.2

Para ver isso, suponhamos que hajam dois valores de t , t_0 e t_1 , tais que $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1)) \equiv (x_0, y_0)$; então, as tangentes à curva em t_0 e t_1 são dadas pelo campo $(f(x, y), g(x, y))$ calculado no mesmo ponto (x_0, y_0) . Vê-se também, neste caso, que a órbita é uma

curva fechada, pois as funções $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas de período $t_1 - t_0$; de fato, basta usar um argumento semelhante ao que utilizamos para provar que as órbitas não se interseccionam. Neste último caso, usamos também a terminologia *órbita periódica*. Resumindo: o teorema de Existência e Unicidade nos diz que o plano de fases (x, y) está coberto por órbitas que não se interseccionam.

Nosso objetivo agora é estudar essa decomposição do plano de fases, que denominaremos *espaço de configurações* ("phase portrait"). Em geral, essa é uma tarefa difícil. Entretanto, desenvolveremos técnicas para fazer um estudo local das órbitas nas vizinhanças de uma singularidade [veja 6.2 abaixo], e teremos o teorema de Poincaré-Bendixon que nos dará informações globais sobre o espaço de configurações.

6.2. Pontos de Equilíbrio ou Singularidades

Um papel muito importante no estudo da geometria do plano de fase é desempenhado pelas soluções constantes $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ de (6.1), as quais são precisamente os zeros do sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Essas soluções são chamadas *pontos de equilíbrio*, nomenclatura inspirada no seu significado físico, ou *singularidades* (também *pontos singulares*), nomenclatura proveniente de seu sentido geométrico. Os pontos não singulares são chamados *regulares*.

Exemplo 1. Considere a equação não linear de 2ª ordem

$$\ddot{x} - 8x\dot{x} = 0.$$

Fazendo $\dot{x} = y$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8xy \end{cases}$$

que é do tipo (6.1) com $f(x, y) = y$ e $g(x, y) = 8xy$. Nesse caso f e g são de classe C^1 , temos existência e unicidade de solução e um teorema análogo ao Teorema 3.7 pode ser aplicado, isto é, as soluções desse sistema tendem para o bordo de $\Omega = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3\}$. Nosso

objetivo é estudar o plano de fase. As soluções de equilíbrio são obtidas fazendo

$$f(x, y) = y = 0 \quad \text{e} \quad g(x, y) = 8xy = 0$$

portanto $x(t) \equiv \text{cte}$ e $y(t) \equiv 0$ são as soluções de equilíbrio (todos os pontos do eixo- x). Para obtermos as outras soluções, vamos supor que $x = x(t)$ possa ser invertida, obtendo $t = t(x)$. Portanto, segue-se do sistema, que

$$\frac{dy}{dx} = 8x,$$

e logo $y(x) = 4x^2 + c$. O plano de fase é do tipo

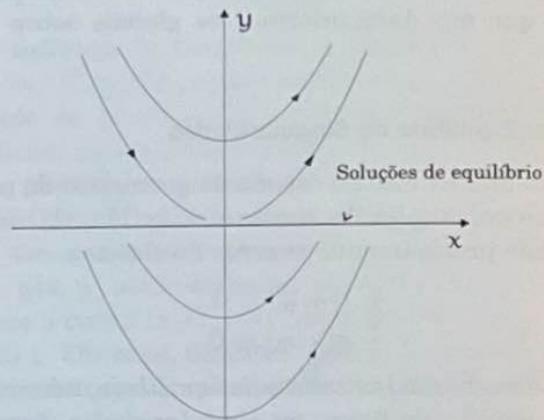


Figura 6.3

As órbitas que “moram” nas parábolas cujos vértices estão abaixo do eixo- x não tocam esse eixo. Portanto, são limitadas, isto é, existe uma constante k tal que

$$\|(x(t), y(t))\| \leq k, \quad \forall t \in (\omega_-, \omega_+).$$

Usando a observação que segue ao Teorema 3.7, concluímos que essas órbitas são globalmente definidas, isto é, $(\omega_-, \omega_+) = \mathbb{R}$.

Observação: Quando as soluções de um sistema autônomo são globalmente definidas, podemos definir a função

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

por

$$\varphi(P, t) = (x(t), y(t))$$

onde $(x(t), y(t))$ é a solução de (6.1) tal que $(x(0), y(0)) = P$. Associado a φ introduzimos a família de funções a um parâmetro

$$\varphi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\varphi_t(P) = \varphi(P, t)$. Temos, pelos teoremas de existência e unicidade e dependência contínua em relação às condições iniciais, que

- i) $\varphi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua
- ii) $\varphi_0 = \text{id}$
- iii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Uma família a um parâmetro satisfazendo as 3 propriedades acima é chamada de *fluxo* ou *sistema dinâmico*.

A seguir vamos estender os conceitos de estabilidade, introduzidos na seção 2.3 para sistemas autônomos no plano.

Definição 6.1. Um ponto de equilíbrio (ou singularidade) (x_0, y_0) é *estável* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para qualquer órbita $(x(t), y(t))$ com

$$\text{dist}((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta,$$

tenhamos

$$\text{dist}((x(t), y(t)), (x_0, y_0)) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Definição 6.2. Um ponto de equilíbrio (ou singularidade) (x_0, y_0) é *assintoticamente estável* se ele for *estável* e se existir um $\eta > 0$ tal que toda órbita $(x(t), y(t))$ com

$$\text{dist}((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \eta$$

então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0). \quad (*)$$

Essa definição simplesmente diz que órbitas “começando perto” de (x_0, y_0) permanecem perto, e de fato convergem para o ponto de equilíbrio.

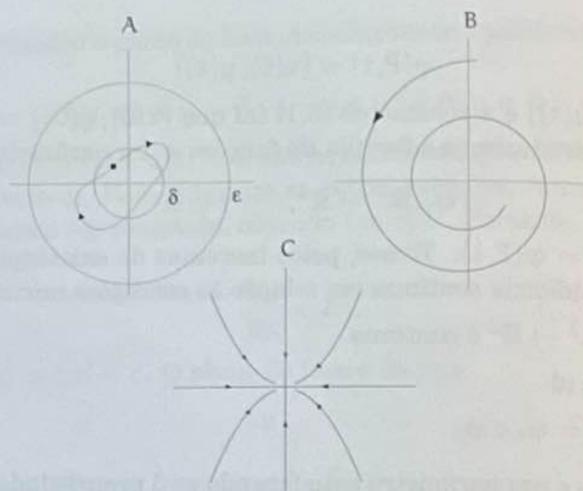


Figura 6.4

As figuras B e C apresentam pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; já o exemplo A mostra um ponto de equilíbrio somente estável.

Na definição de singularidade assintoticamente estável, grifamos a palavra estável para enfatizar que a condição (*), uma característica desse tipo de singularidade, não é suficiente para caracterizá-la. Há exemplos mostrando essa eventualidade, cf. L. Cesari "Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations", Springer-Verlag (1959). Uma singularidade que não é estável, chama-se *instável*.

Vamos agora supor que a origem $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de (6.1), e fazer um estudo da geometria das órbitas em sua vizinhança. O caso de uma singularidade $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ pode ser reduzido ao caso de singularidade na origem mediante a mudança de variáveis $(x, y) \rightarrow (x - x_0, y - y_0)$. Pela fórmula de Taylor, f e g podem ser escritas como

$$\begin{cases} f(x, y) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + F(x, y) \\ g(x, y) = g_x(0, 0)x + g_y(0, 0)y + G(x, y) \end{cases} \quad (6.3)$$

onde F e G são $o(|x| + |y|)$; a notação "o" significa o seguinte: $h(s) =$

$o(s)$ se $h(s)/|s| \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$. As expressões em (6.3) nos sugerem que o comportamento das órbitas nas vizinhanças da singularidade $(0, 0)$ deve ser determinado pela parte linear do campo (f, g) . Como veremos mais adiante isso é "quase" verdade. Portanto, comecemos com o estudo de um sistema linear com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (6.4)$$

6.2.1 O sistema linear (6.4).

Suponhamos que a origem seja uma singularidade isolada do sistema (6.4), ou, equivalentemente, $ad - bc \neq 0$. Para facilitar nossas explicações, vamos introduzir o vetor X e a matriz A :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e assim (6.4) se escreve como

$$\dot{X} = AX. \quad (6.5)$$

O sistema (6.5) lembra a equação diferencial $\dot{x} = ax$, estudada no Capítulo 2, cuja solução geral foi

$$x(t) = ce^{at}.$$

Ocorre, então, a idéia de tentar soluções de (6.4) ou (6.5) na forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}, \text{ ou equivalentemente, } X(t) = Ce^{\lambda t}. \quad (6.6)$$

Substituindo-se em (6.4) [se o leitor preferir, ele poderá prosseguir usando vetores e matrizes], obtemos que c_1, c_2 e λ devem satisfazer ao sistema

$$\begin{cases} (a - \lambda)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d - \lambda)c_2 = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Como estamos interessados em soluções não triviais (c_1, c_2) [i.e., $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$ ou ambos $\neq 0$], segue-se que o determinante do sistema deve ser 0:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (6.8)$$

As raízes dessa equação do 2º grau são os *valores próprios* (ou auto-valores) da matriz A . O polinômio (no caso um trinômio) em (6.8) é chamado o *polinômio característico*. Assim, obtidos os auto-valores de A , voltamos ao sistema (6.7), de onde obteremos c_1 e c_2 e poderemos então escrever as soluções de (6.4) na forma (6.6). Entretanto, como nosso interesse central é obter uma descrição pictórica das órbitas nas vizinhanças do ponto singular $(0, 0)$, vamos reduzir o estudo de (6.4) àquele de um sistema equivalente, mais simples. A Álgebra Linear nos ensina que, através de uma mudança de variáveis no plano (x, y) a matriz A pode ser levada a um dos tipos abaixo, dependendo do sinal do discriminante

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc.$$

Isto é um caso particular da Forma de Jordan, veja o próximo capítulo.

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

onde $\lambda \neq \mu$ são os dois autovalores de A supostos reais.

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (6.9')$$

onde λ é o único autovalor (necessariamente real) de A .

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (6.9'')$$

λ como em (6.9').

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (6.9''')$$

onde $\alpha \pm i\beta$ são os autovalores de A .

O que se quer dizer com A ser levada em B mediante uma mudança de variáveis é o seguinte: existe uma matriz não singular Q (a matriz da mudança de variáveis) tal que $B = QAQ^{-1}$. Concluimos, pois, que a curva $Y(t) = QX(t)$ é tal que

$$\dot{Y} = Q\dot{X} = QA\dot{X} = QAQ^{-1}Y = BY,$$

e conseqüentemente, basta estudar o sistema (6.4) com a matriz de um dos quatro tipos acima. Isso porque, após obter as órbitas nesses casos,

pode-se voltar às variáveis originais $X = Q^{-1}Y$ e o que acontece no plano de fases é apenas uma distorsão das órbitas; distorsão significa rotação em torno da origem, reflexão em torno de uma reta passando pela origem, expansão ou compressão ao longo de dois eixos.

Caso (6.9). O sistema (6.4) se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\mu t}. \end{cases}$$

Basta estudar as órbitas no 1º quadrante (nos demais quadrantes, as órbitas são obtidas por simetria); portanto para $c_1, c_2 > 0$, obtemos:

$$c_1^{-\mu} x^\mu = c_2^{-\lambda} y^\lambda \implies y = cx^{\mu/\lambda}, \quad x > 0.$$

Daí, sem se preocupar com a orientação, no momento, vemos que a curva solução tem o aspecto indicado nas figuras abaixo

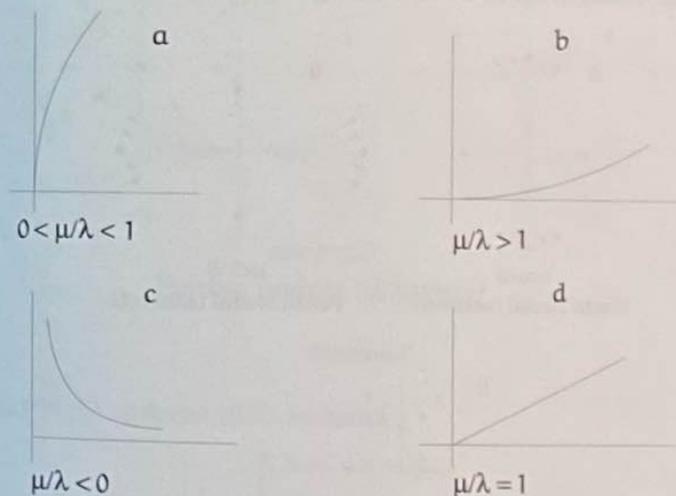


Figura 6.5

Observe que os casos extremos $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$ dão os semi-eixos como órbitas. Observe que, nos casos a e b, as órbitas, entram na origem ao longo de uma direção fixa: quando $0 < \mu/\lambda < 1$ as

inclinações das tangentes à órbita, \dot{y}/\dot{x} , tende a $+\infty$, e quando $\mu/\lambda > 1$ essas inclinações, \dot{y}/\dot{x} , tendem a 0.

Consegue-se a orientação das curvas pela análise das soluções na forma paramétrica. Assim: (i) se $\lambda, \mu < 0$ as curvas em a e b tendem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$, e aí dizemos que a origem é um *atrator*, (ii) se $\lambda, \mu > 0$ as curvas em a e b se afastam da origem quando $t \rightarrow +\infty$. Uma análise semelhante se faz quando λ e μ têm sinais diferentes. Pondo todas essas observações, juntas, obtemos as configurações A, B e C abaixo. Usa-se também a expressão *nó* para designar um ponto nodal.

Caso (6.9'). O sistema (6.4) se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow y = cx$$

e assim as curvas soluções são semi-retas como na figura d acima, e o espaço de configurações é como na figura D, abaixo.

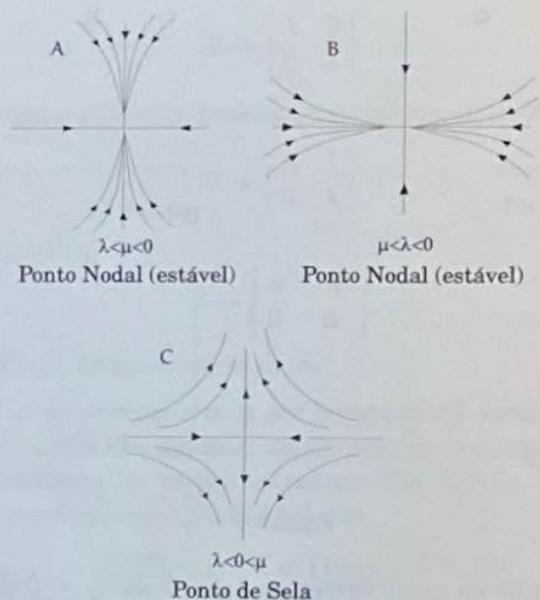


Figura 6.6

Caso (6.9''). O sistema (6.4) se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Logo, os semi-eixos $x > 0$ e $x < 0$ são curvas soluções, correspondentes a $c_2 = 0$ e com orientação dependendo do sinal de λ . Basta considerar o caso $c_2 > 0$, o outro se seguindo por simetria. Suponhamos que $\lambda < 0$. Vemos que para t grande e positivo, $x(t) > 0$, e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$; além disso, a curva corta o eixo y quando $t = -c_1/c_2$, e $x(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, todas as órbitas entram na origem ao longo de uma direção determinada; de fato, $\dot{y}/\dot{x} = \lambda c_2 / (\lambda c_1 + \lambda c_2 t + c_2) \rightarrow 0$. Assim, obtemos a configuração em E abaixo

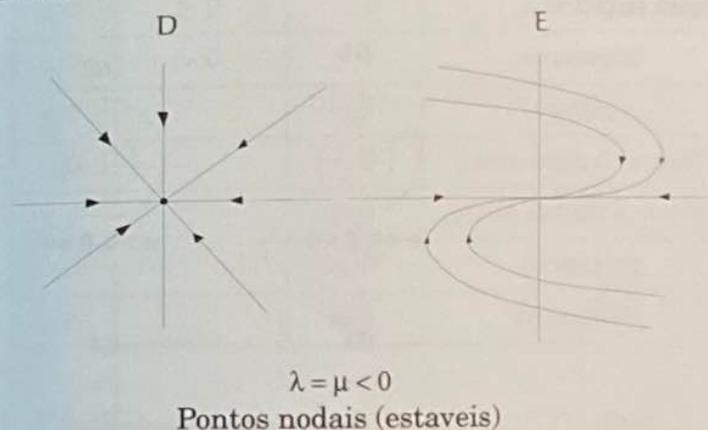


Figura 6.7

Caso (6.9'''). O sistema (6.4) se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

Neste caso, é preferível usar coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Daí

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}$$

de onde se segue

$$\dot{r} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = r^{-1}(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta).$$

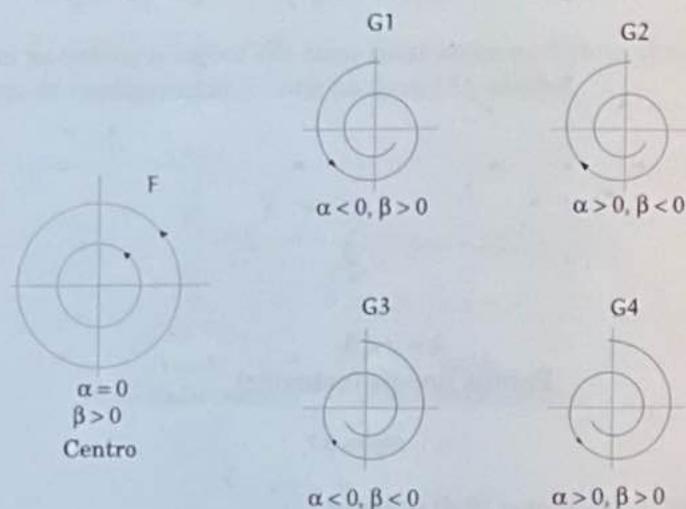
As últimas equações nos dão

$$\dot{r} = \alpha r \quad \dot{\theta} = \beta$$

e daí

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0,$$

que são as equações paramétricas em coordenadas polares da órbita que, para $t = 0$, passa pelo ponto (r_0, θ_0) . Portanto, a órbita é: (i) um círculo, se $\alpha = 0$, (ii) uma espiral logarítmica se $\alpha \neq 0$, e a origem é um atrator se $\alpha < 0$. Além disso, a espiral é dextrógira se $\beta < 0$ e sinistrógira se $\beta > 0$.



Pontos Espirais

Figura 6.8

Atenção. Um retorno às variáveis (x, y) do sistema (6.4) implica apenas em uma distorsão das figuras acima. Nas figuras A, B, C, as órbitas entram na singularidade ao longo de duas direções ortogonais; nas figuras correspondentes ao sistema original haverá duas direções

não necessariamente ortogonais ao longo das quais as órbitas entrarão na singularidade. Na figura E continuará a haver uma direção, não necessariamente um eixo coordenado, ao longo da qual as órbitas entram na origem. Na figura F os círculos serão transformados em elipses. Podemos, pois, resumir no quadro abaixo as várias possibilidades dependendo do discriminante

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc$$

e dos valores relativos de a , b , c e d :

Δ	$ad - bc$	$a + d$	Tipo de Singularidade
> 0	< 0		sela
> 0	> 0	< 0	nó estável
> 0	> 0	> 0	nó instável
< 0		$= 0$	centro
< 0		< 0	ponto espiral estável
< 0		> 0	ponto espiral instável
$= 0$		< 0	nó estável
$= 0$		> 0	nó instável

6.2.2 O sistema não linear (6.1).

Pelas hipóteses feitas acima, as funções f e g podem ser escritas na forma (6.3), com F e G contínuas e $o(|x| + |y|)$. Chamando $a = f_x(0, 0)$, $b = f_y(0, 0)$, $c = g_x(0, 0)$ e $d = g_y(0, 0)$, o sistema (6.1) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + G(x, y) \end{cases} \quad (6.9)$$

Podemos, portanto, olhar o sistema (6.9) como uma perturbação não linear do sistema linear (6.4). A origem $(0, 0)$ é uma singularidade de (6.9) e, se supusermos $ad - bc \neq 0$, tratar-se-á de uma singularidade isolada e, neste caso, dizemos que a origem é um *ponto singular simples*; caso $ad - bc = 0$, então, a natureza da singularidade depende

fortemente da parte não linear. Nas nossas considerações suporemos sempre que a origem é um ponto singular simples. Como dissemos acima, é de se esperar que a parte linear do sistema (6.9), isto é, o sistema (6.4), descreva a geometria das órbitas na vizinhança da origem; entretanto isso é aproximadamente verdade. De fato, todos os fatos ou propriedades do sistema (6.4) que dependem de desigualdades entre a , b , c e d permanecerão inalteradas, cf. quadro acima. Aquelas que são caracterizadas por igualdades podem mudar. Mais precisamente, temos os resultados abaixo, cujas demonstrações o leitor pode encontrar no livro de E. Coddington e N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill Book Company, New York (1955). Veja também a secção 7.3 do próximo capítulo.

(i) Se a origem for um atrator para o sistema linear (6.4), então também o será para o sistema não linear (6.9).

(ii) Se a origem for um ponto espiral para o sistema linear (6.4), então também o será para o sistema não linear (6.9).

(iii) Se a origem for um ponto de sela para o sistema linear (6.4), então também o será para o sistema não linear (6.9).

(iv) Se a origem for um ponto nodal dos tipos A, B para o sistema linear (6.4), então também a origem é ainda um ponto nodal para o sistema não linear (6.9).

(v) Se a origem for um centro para o sistema linear (6.4), então, a origem pode ser um centro ou um ponto espiral para o sistema (6.9).

(vi) Se a origem for um ponto nodal do tipo D, então a origem pode ser um nó ou um ponto espiral para o sistema (6.9).

Vamos ilustrar (v) e (vi) com exemplos.

Exemplo 1. Considere o sistema:

$$\dot{x} = -x - \frac{y}{\ln(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \dot{y} = -y + \frac{x}{\ln(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad (6.10)$$

o qual pode ser escrito, em coordenadas polares, como

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\ln r}, \quad \dot{r} = -r.$$

Logo $r(t) = ce^{-t}$, onde $c > 0$ é uma constante arbitrária, e daí

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\ln c - t} \Rightarrow \theta(t) = k - \ln(t - \ln c)$$

onde $k = \theta(t_0) + \ln(t_0 - \ln c)$. Isso mostra que a origem é um ponto espiral para (6.10), cuja parte linear tem a origem como um ponto nodal.

Exemplo 2. Considere o sistema

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6.11)$$

o qual pode ser escrito, em coordenadas polares, como

$$\dot{\theta} = 1, \quad \dot{r} = -r^2.$$

Logo $\theta(t) = t + \theta_0$ e $r(t) = \left(t + \frac{1}{r_0}\right)^{-1}$ são as equações polares paramétricas da solução do sistema que, no instante $t = 0$, passa pelo ponto (r_0, θ_0) . Essa curva é uma espiral, e assim a origem é um ponto espiral para o sistema (6.11). Observe que a origem, para o sistema linear correspondente a (6.11), é um centro.

Exemplo 3. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{\pi}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{\pi}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \end{cases} \quad (6.12)$$

o qual pode ser escrito, em coordenadas polares, como

$$\dot{\theta} = 1, \quad \dot{r} = r^3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{r}.$$

Vê-se, então, que os círculos $r = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, são órbitas fechadas. Temos também

$$\dot{r} > 0, \text{ quando } r > 1$$

$$\dot{r} < 0, \text{ quando } \frac{1}{2m} < r < \frac{1}{2m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\dot{r} > 0, \text{ quando } \frac{1}{2m+1} < r < \frac{1}{2m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

As órbitas nas regiões anulares, $1/(n+1) < r < 1/n$, não são fechadas, e sim espirais, pois $\theta(t)$ e $r(t)$ são estritamente monotônicas. Além disso, elas devem se aproximar de círculos $1/n$ quando $t \rightarrow +\infty$; uma justificativa dessa asserção será feita na seção 6.3. Neste caso, a origem é um centro para ambos os sistemas, o linear e o não linear.

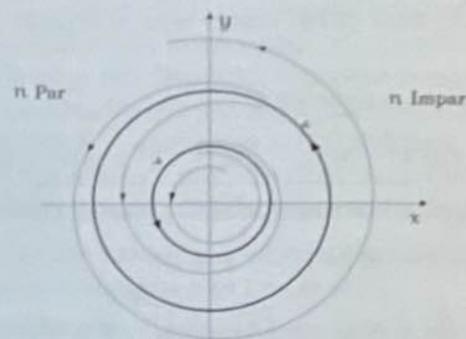


Figura 6.9

6.3. O Teorema de Poincaré-Bendixon

Na seção 6.2, estudamos o espaço de configurações, ou seja a geometria das órbitas do sistema (6.1) nas vizinhanças de uma singularidade. Os resultados lá obtidos foram tipicamente locais, apesar de servirem, em vários dos problemas para se ter uma descrição global das órbitas no plano de fases. Entretanto, em muitos problemas das aplicações, o mero conhecimento das singularidades não chega para descrever o espaço das configurações, e conseqüentemente não é suficiente para responder perguntas importantes sobre o comportamento global das órbitas. Em algumas aplicações à mecânica e à eletricidade, um papel importante é desempenhado pelas soluções periódicas de (6.1), que correspondem no plano de fases a órbitas fechadas. Nosso objetivo central nesta seção é estabelecer critérios que nos permitam assegurar que tais órbitas existem. Dado o objetivo introdutório do presente trabalho, vamos apenas arranhar a superfície de uma teoria rica e profunda criada por Henri Poincaré, e que ainda hoje é objeto de muita pesquisa. Se conseguirmos dar ao leitor uma idéia dos problemas primeiros dessa teoria e de sua relevância nas aplicações,

acreditamos ter atingido nosso objetivo.

Exemplo 1. (Um sistema mecânico, cf. J.J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers.) Considere um sistema mecânico constituído por um bloco de massa m ligado a uma mola e repousando sobre um correia áspera que gira com velocidade v_0 .

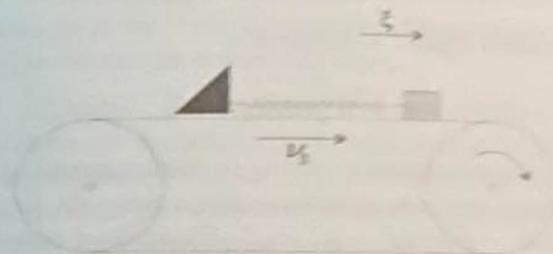


Figura 6.10

Suponhamos que inicialmente (mola não distendida ou comprimida) o bloco se acha na posição $\xi = 0$. A força de atrito arrasta o bloco para a direita até uma posição máxima e aí o bloco regressa, começando um movimento oscilatório. O movimento do bloco se deve a um desequilíbrio entre a força de atrito e a força $-k\xi$ da mola; nosso objetivo é estudar esse fenômeno à luz da mecânica newtoniana. A força de atrito é uma função da velocidade do bloco relativa à correia: $-\phi(\dot{\xi} - v_0)$. A função $-\phi(v)$ em alguns casos tem uma forma algébrica bem definida; entretanto muito se pode dizer sobre o problema se conhecermos apenas a sua forma gráfica, juntamente com certas propriedades. Isso mostra a força dos métodos que vamos descrever. No momento, vamos supor que o gráfico de $\phi(v)$ seja o seguinte:

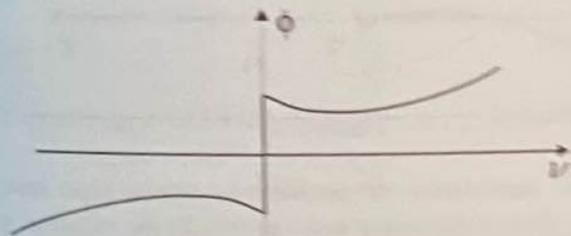


Figura 6.11

As órbitas nas regiões anulares, $1/(n+1) < r < 1/n$, não são fechadas, e sim espirais, pois $\theta(t)$ e $r(t)$ são estritamente monotônicas. Além disso, elas devem se aproximar de círculos $1/n$ quando $t \rightarrow +\infty$; uma justificativa dessa asserção será feita na seção 6.3. Neste caso, a origem é um centro para ambos os sistemas, o linear e o não linear.

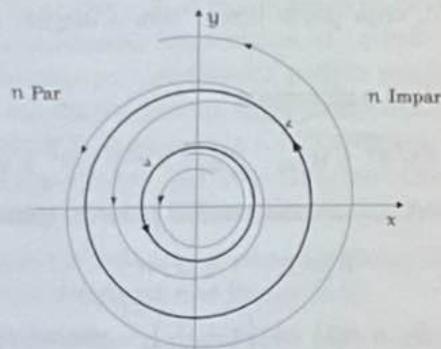


Figura 6.9

6.3. O Teorema de Poincaré-Bendixon

Na seção 6.2, estudamos o espaço de configurações, ou seja a geometria das órbitas do sistema (6.1) nas vizinhanças de uma singularidade. Os resultados lá obtidos foram tipicamente locais, apesar de servirem, em vários dos problemas para se ter uma descrição global das órbitas no plano de fases. Entretanto, em muitos problemas das aplicações, o mero conhecimento das singularidades não chega para descrever o espaço das configurações, e conseqüentemente não é suficiente para responder perguntas importantes sobre o comportamento global das órbitas. Em algumas aplicações à mecânica e à eletricidade, um papel importante é desempenhado pelas soluções periódicas de (6.1), que correspondem no plano de fases a órbitas fechadas. Nosso objetivo central nesta seção é estabelecer critérios que nos permitam assegurar que tais órbitas existem. Dado o objetivo introdutório do presente trabalho, vamos apenas arranhar a superfície de uma teoria rica e profunda criada por Henri Poincaré, e que ainda hoje é objeto de muita pesquisa. Se conseguirmos dar ao leitor uma idéia dos problemas primeiros dessa teoria e de sua relevância nas aplicações,

acreditamos ter atingido nosso objetivo.

Exemplo 1. (Um sistema mecânico, cf. J.J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers.) Considere um sistema mecânico constituído por um bloco de massa m ligado a uma mola e repousando sobre um correia áspera que gira com velocidade v_0 .

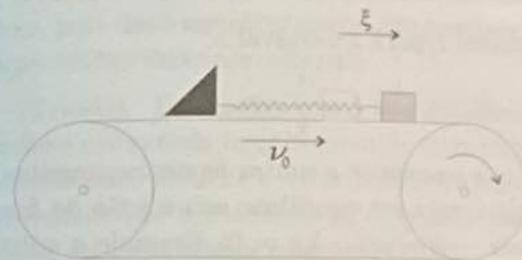


Figura 6.10

Suponhamos que inicialmente (mola não distendida ou comprimida) o bloco se acha na posição $\xi = 0$. A força de atrito arrasta o bloco para a direita até uma posição máxima e aí o bloco regressa, começando um movimento oscilatório. O movimento do bloco se deve a um desequilíbrio entre a força de atrito e a força $-k\xi$ da mola; nosso objetivo é estudar esse fenômeno à luz da mecânica newtoniana. A força de atrito é uma função da velocidade do bloco relativa à correia: $-\phi(\xi - v_0)$. A função $-\phi(v)$ em alguns casos tem uma forma algébrica bem definida; entretanto muito se pode dizer sobre o problema se conhecermos apenas a sua forma gráfica, juntamente com certas propriedades. Isso mostra a força dos métodos que vamos descrever. No momento, vamos supor que o gráfico de $\phi(v)$ seja o seguinte:

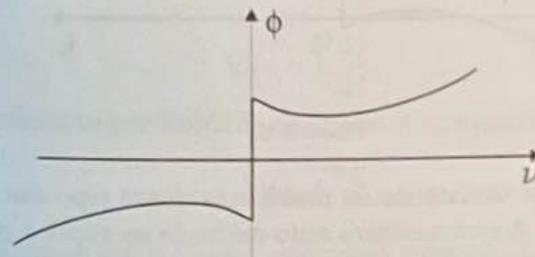


Figura 6.11

A interpretação do gráfico é a seguinte: quando o bloco está parado relativamente à correia, a força de atrito aumenta (i.e. a resistência do bloco a se mover pela ação de uma força externa) até atingir um valor máximo, e a partir daí decresce, voltando depois a crescer quando v aumenta. Pela 2ª lei de Newton, temos

$$m\ddot{\xi} = -\phi(\dot{\xi} - v_0) - k\xi. \quad (6.13)$$

Mudamos da variável ξ para a variável x :

$$x = \xi + \frac{1}{k} \phi(-v_0), \quad (6.14)$$

o que quer dizer que passamos a contar os deslocamentos a partir da posição onde o bloco está em equilíbrio sob a ação da força de atrito e da força da mola: $-\phi(-v_0) - k\xi = 0$. Fazendo a substituição em (6.13) obtemos

$$m\ddot{x} + \phi(\dot{x} - v_0) - \phi(-v_0) + kx = 0.$$

Fazendo a substituição

$$F(\dot{x}) = \phi(\dot{x} - v_0) - \phi(-v_0),$$

obtemos:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + kx = 0, \quad (6.15)$$

onde a função F tem o gráfico seguinte, caso v_0 não seja muito grande.

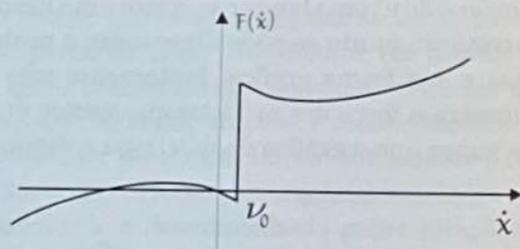


Figura 6.12

As soluções oscilatórias de problemas desse tipo são chamadas *auto-excitadas*. A nomenclatura auto-excitada se explica pelo fato de que a solução periódica é criada pelo próprio sistema, sem a ação de forças externas. Observe que a existência de soluções periódicas para

equação (6.15) é um fenômeno tipicamente não linear; nos sistemas mecânicos lineares, a presença de força de atrito implica necessariamente em amortecimento. E mais, neste caso, só aparecem soluções periódicas se houver forças externas periódicas, e aí as oscilações não seriam auto-excitadas. Um modelo mecânico do tipo descrito acima foi usado por Rayleigh para explicar as oscilações das cordas do violino quando arrastadas pelo arco; entretanto, esse é um problema bem mais complexo, pois deve envolver derivadas parciais, uma vez que se trata de um problema de corda vibrante.

Exemplo 2. (Triodo). Para não entrar nos detalhes da dedução da equação que deve ser satisfeita pela corrente num trecho do circuito [o leitor interessado pode vê-la no livro de Stoker], vamos considerar um modelo representado por um sistema RLC, onde a queda de voltagem, V_{CD} , no resistor satisfaz a uma relação do tipo:

$$V_{CD} = k \left(\frac{1}{3} I^3 - I \right), \quad k > 0$$

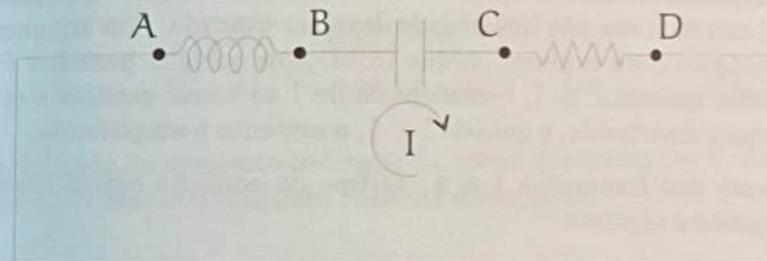


Figura 6.13

Como a variação do potencial (voltagem) no indutor, V_{AB} , é dada por

$$V_{AB} = L \frac{dI}{dt},$$

onde I é a corrente por unidade de tempo, e no capacitor, V_{BC} , por

$$V_{BC} = \frac{Q}{C}$$

onde Q é a carga e L e C são constantes (respect. indutância e capacitância), temos, pela 2ª lei de Kirchhoff (a soma algébrica das

diferenças de potencial em uma malha é zero), que

$$L\dot{I} + \frac{Q}{C} + k\left(\frac{1}{3}I^3 - I\right) = 0$$

e daí, por derivação com relação a t , obtemos

$$L\ddot{I} + k(I^2 - 1)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0. \quad (6.16)$$

A equação (6.16) é conhecida como a *equação de van der Pol*, que foi quem a derivou pela primeira vez e para ela obteve a existência de uma solução periódica. Como no Exemplo 1 observe que uma linearização de (6.16), substituindo-a por

$$L\ddot{I} - k\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \quad (6.17)$$

não é uma aproximação admissível do fenômeno real, uma vez que este apresenta oscilações auto-excitadas, e as soluções de (6.17) crescem exponencialmente. Portanto, não há que resistir: a equação (6.16) com toda sua não linearidade deve ser atacada. Um argumento heurístico para explicar porque (6.16) tem solução periódica é o seguinte: quando $l > 1$, o coeficiente de \dot{I} se torna positivo e aí a corrente é atenuada, e quando $l < 1$, a corrente é amplificada.

Resumo dos Exemplos 1 e 2. O tipo de equação obtida nesses exemplos é o seguinte

$$\ddot{u} + f(u)\dot{u} + ku = 0.$$

Não nos propomos a estudar equações de um tipo mais geral

$$\ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = 0, \quad (6.18)$$

que é conhecida como a equação de Liénard. Esta equação é equivalente ao seguinte sistema no plano de fases, $x = u$, $y = \dot{u}$:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x). \quad (6.19)$$

Nosso problema é estudar a questão da existência de órbitas fechadas (i.e. soluções periódicas) de (6.19), ou, mais geralmente, do

sistema (6.1). A resposta a essa questão é dada pelo teorema de Poincaré-Bendixon, enunciado abaixo. Antes, vamos introduzir os conceitos de conjuntos limites. Suponha que a solução

$$\varphi(t, P) = (x(t), y(t))$$

de (6.1), com condição inicial $P = (x(0), y(0))$, esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$\gamma = \gamma(P) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de *órbita* do sistema (6.1) através do ponto $P \in \mathbb{R}^2$. Definimos a *semi-órbita positiva* como

$$\gamma^+ = \gamma^+(P) = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\},$$

e, analogamente a semi-órbita negativa.

Definição 6.3. O conjunto

$$\omega(P) = \omega(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ t.q. } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n))\}$$

é chamado de conjunto ω -limite da órbita que passa por P . Analogamente define-se o conjunto α -limite como sendo

$$\alpha(P) = \alpha(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ t.q. } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n))\}.$$

Exemplo 3. Nos sistemas lineares da seção 6.2.1, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável é o conjunto ω -limite de qualquer órbita.

Exemplo 4. No sistema do Exemplo 3 da seção 6.2.2, temos que os círculos $r = \frac{1}{n}$ com n par são conjuntos ω -limite, e para n ímpar são α -limite.

Exemplo 5. O conjunto ω -limite não é necessariamente conexo. Na figura 6.14 temos que $\omega(P) = \gamma(P_1) \cup \gamma(P_2)$.

diferenças de potencial em uma malha é zero), que

$$L\dot{I} + \frac{Q}{C} + k\left(\frac{1}{3}I^3 - I\right) = 0$$

e daí, por derivação com relação a t , obtemos

$$L\ddot{I} + k(I^2 - 1)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0. \quad (6.16)$$

A equação (6.16) é conhecida como a *equação de van der Pol*, que foi quem a derivou pela primeira vez e para ela obteve a existência de uma solução periódica. Como no Exemplo 1 observe que uma linearização de (6.16), substituindo-a por

$$L\ddot{I} - k\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \quad (6.17)$$

não é uma aproximação admissível do fenômeno real, uma vez que este apresenta oscilações auto-excitadas, e as soluções de (6.17) crescem exponencialmente. Portanto, não há que resistir: a equação (6.16) com toda sua não linearidade deve ser atacada. Um argumento heurístico para explicar porque (6.16) tem solução periódica é o seguinte: quando $I > 1$, o coeficiente de \dot{I} se torna positivo e aí a corrente é amortecida, e quando $I < 1$, a corrente é amplificada.

Resumo dos Exemplos 1 e 2. O tipo de equação obtida nesses exemplos é o seguinte

$$\ddot{u} + f(u)\dot{u} + ku = 0.$$

Nós nos propomos a estudar equações de um tipo mais geral

$$\ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = 0, \quad (6.18)$$

que é conhecida como a *equação de Liénard*. Esta equação é equivalente ao seguinte sistema no plano de fases, $x = u$, $y = \dot{u}$:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x). \quad (6.19)$$

Nosso problema é estudar a questão da existência de órbitas fechadas (i.e. soluções periódicas) de (6.19), ou, mais geralmente, do

sistema (6.1). A resposta a essa questão é dada pelo teorema de Poincaré-Bendixon, enunciado abaixo. Antes, vamos introduzir os conceitos de conjuntos limites. Suponha que a solução

$$\varphi(t, P) = (x(t), y(t))$$

de (6.1), com condição inicial $P = (x(0), y(0))$, esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$\gamma = \gamma(P) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de *órbita* do sistema (6.1) através do ponto $P \in \mathbb{R}^2$. Definimos a *semi-órbita positiva* como

$$\gamma^+ = \gamma^+(P) = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\},$$

e, analogamente a *semi-órbita negativa*.

Definição 6.3. O conjunto

$$\omega(P) = \omega(\gamma) =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ t.q. } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n))\}$$

é chamado de conjunto ω -limite da órbita que passa por P . Analogamente define-se o conjunto α -limite como sendo

$$\alpha(P) = \alpha(\gamma) =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ t.q. } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n))\}.$$

Exemplo 3. Nos sistemas lineares da seção 6.2.1, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável é o conjunto ω -limite de qualquer órbita.

Exemplo 4. No sistema do Exemplo 3 da seção 6.2.2, temos que os círculos $r = \frac{1}{n}$ com n par são conjuntos ω -limite, e para n ímpar são α -limite.

Exemplo 5. O conjunto ω -limite não é necessariamente conexo. Na figura 6.14 temos que $\omega(P) = \gamma(P_1) \cup \gamma(P_2)$.

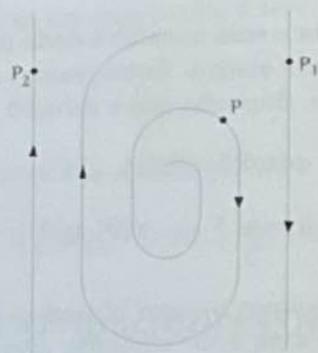


Figura 6.14

Exemplo 6. Considere um sistema com 3 pontos de equilíbrio, sendo 2 pontos espirais instáveis e 1 ponto de sela, como na figura 6.15.

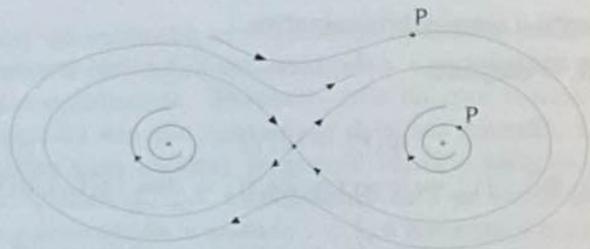


Figura 6.15

Neste caso temos que o conjunto em forma de oito, formado pelas duas órbitas e o ponto de sela, é o conjunto ω -limite de todo ponto P que está fora de ∞ . O laço direito de ∞ é o ω -limite de todo ponto P que está dentro desse laço, exceto o ponto espiral lá contido. Analogamente o laço esquerdo.

As letras gregas α e ω , respectivamente primeira e última letra do alfabeto grego, sugerem o sentido $-\infty$ e $+\infty$ dos conjuntos limites. As principais propriedades desses conjuntos estão resumidas no teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada no livro de Hirsch-Smale ou Hale citados no final desta secção.

Teorema 6.1. Se a semi-órbita positiva $\gamma^+(P)$ é limitada, então o conjunto ω -limite de P satisfaz:

- i) $\omega(P) \neq \emptyset$
- ii) $\omega(P)$ é compacto
- iii) $\omega(P)$ é conexo
- iv) $\omega(P)$ é invariante, isto é, se $\bar{P} \in \omega(P)$ então a solução $\varphi(t, \bar{P}) \in \omega(P)$ para todo t .
- v) $\omega(P)$ atrai a solução $\varphi(t, P)$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist.}(\varphi(t, P), \omega(P)) = 0.$$

Podemos enunciar uma versão análoga para o conjunto α -limite.

Uma consequência importante do Teorema 6.1 é que se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \bar{P},$$

então \bar{P} é ponto de equilíbrio. De fato, $\omega(P) = \{\bar{P}\}$ é invariante, o que implica $\varphi(t, \bar{P}) \equiv \bar{P} \forall t$. Portanto \bar{P} é ponto de equilíbrio.

Teorema 6.2 (Poincaré-Bendixon). Suponha que a semi-órbita $\gamma^+(P)$ é limitada e que $\omega(P)$ não contém uma singularidade (ponto de equilíbrio). Então $\omega(P)$ é uma órbita fechada.

Vale um resultado análogo para $\alpha(P)$.

Definição 6.4. Um ciclo limite é uma órbita fechada (periódica) γ contida em $\omega(P)$ (ou em $\alpha(P)$) onde $P \notin \gamma$.

Exemplo 7. No sistema do Exemplo 3 da secção 6.2.2 os círculos $r = \frac{1}{n}$ com n par são ciclos ω -limites, e com n ímpar são ciclos α -limites.

6.3.1. Consequências do teorema de Poincaré-Bendixon.

Seja Ω uma região (i.e., aberto conexo) de \mathbb{R}^2 , suponha que qualquer solução que encontra $\partial\Omega$ permanece em Ω , isto é, se $(x(t_0), y(t_0)) \in \partial\Omega$ para algum t_0 , então $(x(t), y(t)) \in \Omega, \forall t > t_0$. Se Ω não contiver singularidades, então ela contém necessariamente uma órbita fechada.

A determinação de uma região Ω com a propriedade descrita acima não é tarefa fácil. Vejamos um exemplo fácil, construído para ilustrar a idéia.

Exemplo 8. Considere a equação

$$\ddot{u} + (2u^2 + \dot{u}^2 - 2)\dot{u} + u = 0 \quad (6.20)$$

que é equivalente ao sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(2x^2 + y^2 - 2)y - x. \quad (6.21)$$

De (6.21) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(2x^2 + y^2 - 2)y^2.$$

Agora considere $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 3\}$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é constituída de dois círculos. No círculo $x^2 + y^2 = 1$ temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -(x^2 - 1)y^2 \geq 0. \quad (6.22)$$

e no círculo $x^2 + y^2 = 3$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -(x^2 + 1)y^2 \leq 0. \quad (6.23)$$

Finalmente, (6.22) e (6.23) implicam que as condições da consequência do teorema de Poincaré-Bendixon estão satisfeitas. Logo existe uma órbita fechada em Ω .

Enunciamos a seguir um resultado que garante a existência de solução periódica para a equação de Liénard (6.18).

Teorema 6.3 (Levinson-Smith). *Suponha que f é par, g ímpar, e $g(u) > 0$ para $u > 0$. Sejam*

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds \quad G(u) = \int_0^u g(s) ds.$$

Suponha que (i) $G(u) \rightarrow \infty$ quando $u \rightarrow \infty$, (ii) a função F tem um zero em $u = u_0$, $F(u) < 0$ para $0 < u < u_0$, $F(u)$ é monotônica crescente para $u > u_0$ e $F(u) \rightarrow \infty$ quando $u \rightarrow \infty$. Então a equação (6.18) tem uma única solução periódica, que no plano de fases é uma órbita fechada contendo a origem. Além disso essa órbita é o conjunto ω -limite de qualquer outra órbita $\gamma \neq \{0\}$.

[A demonstração desse teorema e do Teorema de Poincaré-Bendixon estão nos livros mencionados nas referências ao final desta seção. Vamos utilizá-lo em alguns exemplos.]

Exemplo 6. Para a equação de van der Pol

$$\ddot{u} + \mu(u^2 - 1)\dot{u} + u = 0$$

temos

$$F(u) = \mu \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \Rightarrow u_0 = \sqrt{3}.$$

Crítério negativo de Bendixon. Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano \mathbb{R}^2 . Suponha que $\text{div}(f, g) \equiv f_x + g_y$ é sempre positivo ou sempre negativo em Ω . Então, o sistema (6.1) não tem solução periódica contida em Ω . A demonstração é fácil e utiliza o teorema de Green:

$$\iint_R (f_x + g_y) dx dy = \int_C f dy - g dx \quad (6.24)$$

onde R designa a região limitada por uma curva fechada simples C . Suponha que exista uma solução periódica $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ de período T ; designando por C a curva correspondente a φ temos, pela definição da integral de linha:

$$\int_C f dy - g dx = \int_0^T (f\dot{y} - g\dot{x}) dt = 0. \quad (6.25)$$

A hipótese de $\text{div}(f, g)$ ter um sinal definido em Ω implica numa contradição entre (6.25) e

$$\iint_R (f_x + g_y) dx dy \neq 0.$$

Para ilustrar o grau de sofisticação das técnicas invocadas no estudo global do sistema (6.1) vamos enunciar um resultado sobre existência de singularidades, o qual será demonstrado usando o famoso teorema do ponto fixo de Brouwer. "Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^n homeomorfo à bola unitária fechada de \mathbb{R}^n , então toda função contínua $F: K \rightarrow K$ tem (pelo menos) um ponto fixo $x_0 \in K$, i.e., $f(x_0) = x_0$ ". Esse teorema é um resultado profundo, que possui várias demonstrações, nenhuma trivial!

Teorema 6.4. *Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo ao disco unitário fechado. Suponha que K tem a seguinte propriedade: se uma órbita γ encontrar K num instante t_0 então ela permanece em K para $t \geq t_0$. Então K contém pelo menos um ponto de equilíbrio do sistema (6.1).*

Demonstração: A demonstração utiliza a transformação de Poincaré: fixado $T > 0$, para cada $P \in K$ defina

$$\phi(P) = \varphi(T, P)$$

temos que ϕ é contínua (veja Teorema 3.11), $\phi(K) \subset K$, pela hipótese do teorema, e pelo teorema de Brouwer segue-se que existe $X \in K$ tal que $\phi(X) = X$. O que acabamos de fazer vale para qualquer $T > 0$. Logo, tomando uma sucessão $T_n > 0$ com $T_n \rightarrow 0$, temos uma sucessão X_n tal que

$$X_n = \varphi(T_n, X_n) \quad (6.26)$$

e portanto uma sucessão de soluções periódicas de períodos T_n .

Como a sucessão (X_n) está contida no conjunto K , o qual é limitado e fechado (pois é homeomorfo ao disco unitário fechado), segue-se que ela contém uma subsucessão convergente. Mudando a notação, podemos supor que $X_n \rightarrow X_0$.

Agora, dados t e n , existe um inteiro $k_n(t)$ tal que

$$k_n(t)T_n \leq t < [k_n(t) + 1]T_n \quad \text{e} \quad \varphi(k_n(t)T_n, X_n) = X_n \quad (6.27)$$

onde a última igualdade se segue do fato de que a órbita $\varphi(t, X_n)$ é periódica de período T_n .

Estamos agora preparados para provar que $\varphi(t, X_0) = X_0$, para $-\infty < t < \infty$, ou seja X_0 é um ponto singular de (6.1). De fato, temos

$$|\varphi(t, X_0) - X_0| \leq |\varphi(t, X_0) - \varphi(t, X_n)| + |\varphi(t, X_n) - X_n| + |X_n - X_0|,$$

de onde se segue, usando (6.27)

$$\begin{aligned} |\varphi(t, X_0) - X_0| &\leq |\varphi(t, X_0) - \varphi(t, X_n)| + \\ &\quad + |\varphi(t - k_n(t)T_n, X_n) - X_n| + |X_n - X_0| \end{aligned}$$

e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, segue-se o resultado.

Corolário. *Se (6.1) tiver uma órbita fechada γ , então existe uma singularidade na região limitada por γ .*

Este corolário, juntamente com o teorema de Poincaré-Bendixon, implica que se uma região limitada Ω de \mathbb{R}^2 contiver uma semi-órbita, então Ω contém necessariamente um ponto singular de (6.1).

Ao leitor interessado em obter mais informações, sugerimos as seguintes referências:

N. Minorsky, "Nonlinear Oscillations", D. Van Nostrand Co., Inc. (1962).

J. Hale, "Ordinary Differential Equations", Wiley-Interscience (1969).

M. Hirsch and S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", Academic Press, (1974).

J. Sotomayor, "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias", Projeto Euclides, 1979.

6.4. Usando o Software Mathematica

O objetivo desta seção não é oferecer ao leitor um tutorial de utilização do software Mathematica, mas mostrar, através de alguns exemplos, a facilidade de uso do programa e chamar a sua atenção para a utilidade de se ter em mãos um "colaborador", capaz de trabalhar numericamente, simbolicamente e graficamente e ainda com precisão e rapidez.

Vamos dar exemplos de utilização dos comandos `DSolve` e `NDSolve` utilizados para resolver equações diferenciais. A seguir analisaremos a resposta dada pelo programa, e também vamos representá-la graficamente através dos comandos `Plot` e `ParametricPlot`.

O Comando `DSolve` resolve equações simbolicamente e `NDSolve` resolve numericamente. Por exemplo, para resolver $\dot{x} = ax$, com $x(0) = b$, colocamos

```
DSolve[x'[t]==a*x[t], x[t], t]
```

e obtemos a resposta na forma

```
{{x[t] -> E^at C[1]}}
```

Esse comando DSolve possui 3 argumentos separados por vírgulas. O primeiro é a equação, ou as equações, já que podemos incluir nesse argumento um sistema de equações diferenciais, inclusive as condições iniciais, veja os exemplos a seguir. O segundo argumento é a função incógnita ou as funções incógnitas no caso de sistemas, e finalmente, o terceiro argumento é a variável independente.

Exemplos:

$$1. \text{DSolve}\{\mathbf{x}'[t]==a \mathbf{x}[t], \mathbf{x}[0]==\mathbf{b}\}, \mathbf{x}[t], t$$

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \mathbf{b} E^{at}\}\}$$

$$2. \text{DSolve}\mathbf{x}''[t] + \mathbf{x}[t] == 0, \mathbf{x}[t], t$$

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow C[2]\text{Cos}[t] - C[1]\text{Sin}[t]\}\}$$

$$3. \text{DSolve}\{\mathbf{x}''[t] + \text{Sin}[t] == 0, \mathbf{x}[0] == 0, \mathbf{x}'[0] == 1\}, \mathbf{x}[t], t$$

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t]\}\}$$

$$4. \text{DSolve}[$$

$$\{\mathbf{x}'[t] == \mathbf{y}[t],$$

$$\mathbf{y}'[t] == -\text{Sin}[t],$$

$$\mathbf{x}[0] == 0,$$

$$\mathbf{y}[0] == 1\}, \{\mathbf{x}[t], \mathbf{y}[t]\}, t$$

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t], \mathbf{y}[t] \rightarrow \text{Cos}[t]\}\}$$

O programa trabalha com *listas* que são elementos entre chaves. No Exemplo 4 acima o primeiro argumento é uma lista com 4 elementos. As respostas também são dadas em forma de listas. O comando usado para se obter um determinado elemento de uma lista é o colchete duplo. Por exemplo o comando

$$\{10, 15, 20, 25\} \{\{2\}\}$$

produz o segundo elemento da lista, no caso o 15. Um outro comando que usaremos é o `%`. Coloca-se `s = %` para designar por `s` o resultado imediatamente anterior. Agora vamos

usar esses comandos para estudar a resposta do Exemplo 4, veja abaixo os resultados produzidos pelo programa.

DSolve[

$$\{\mathbf{x}'[t] == \mathbf{y}[t],$$

$$\mathbf{y}'[t] == -\text{Sin}[t],$$

$$\mathbf{x}[0] == 0,$$

$$\mathbf{y}[0] == 1\}, \{\mathbf{x}[t], \mathbf{y}[t]\}, t$$

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t], \mathbf{y}[t] \rightarrow \text{Cos}[t]\}\}$$

`s = %`

$$\{\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t], \mathbf{y}[t] \rightarrow \text{Cos}[t]\}\}$$

`s[[1]]`

$$\{\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t], \mathbf{y}[t] \rightarrow \text{Cos}[t]\}$$

`s[[1]][[1]]`

$$\mathbf{x}[t] \rightarrow \text{Sin}[t]$$

`u = s[[1]][[1]][[2]]`

`Sin[t]`

`v = s[[1]][[2]][[2]]`

`Cos[t]`

`Plot[u, {t, 0, 2Pi}]`

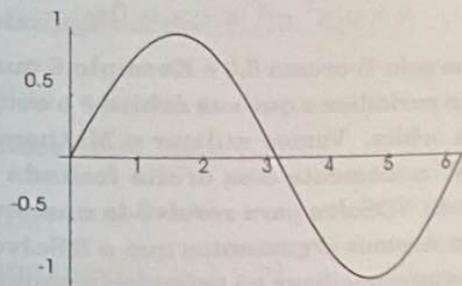


Figura 6.16

Plot[v, {t, 0, 2Pi}]

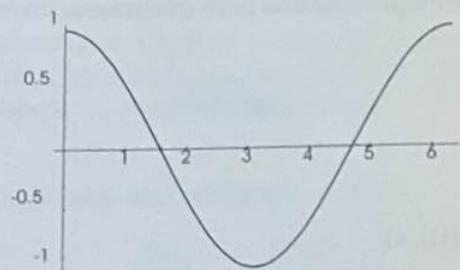


Figura 6.17

ParametricPlot[{u, v}, {t, 0, 2Pi}]

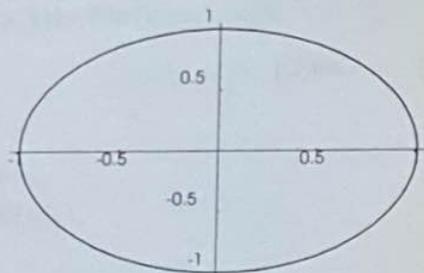


Figura 6.18

Vamos agora analisar uma equação não-linear. Considere, por exemplo, a equação de van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

com $\mu = 0.5$. Vimos pelo Teorema 6.3 e Exemplo 6 que essa equação possui uma solução periódica e que sua órbita é o conjunto ω -limite de qualquer outra órbita. Vamos utilizar o Mathematica para determinarmos aproximadamente essa órbita fechada e seu período. Usaremos o comando NDSolve para resolvê-la numericamente, esse comando possui os mesmos argumentos que o DSolve com algumas restrições. Temos que especificar no primeiro argumento condições iniciais que determinam a solução de maneira única e no terceiro argumento devemos especificar o intervalo da variável independente.

Consideremos, pois, o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 0.5(x^2 - 1)y \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

e vamos resolvê-lo para $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ e para t no intervalo $[0, 10]$:

```
NDSolve[
  x'[t] == y[t],
  y'[t] == -x[t] - 0.5 ((x[t])^2 - 1)y[t],
  x[0] == 3,
  y[0] == 0
],
{x, y}, {t, 0, 10}]
{{x -> InterpolatingFunction[0., 10., <>],
  y -> InterpolatingFunction[0., 10., <>]}

h = %
{{x -> InterpolatingFunction[0., 10., <>],
  y -> InterpolatingFunction[0., 10., <>]}

u1 = h[[1]][[1]][[2]]
InterpolatingFunction[[0., 10., <>]]

v1 = h[[1]][[2]][[2]]
InterpolatingFunction[[0., 10., <>]]

ParametricPlot[{u1[t], v1[t]}, {t, 0, 10}]
```

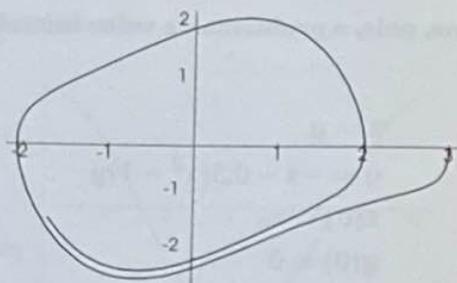


Figura 6.19

```

NDSolve[
  x'[t] == y[t],
  y'[t] == -x[t] - 0.5((x[t])^2 - 1)y[t],
  x[0] == 1,
  y[0] == 0
],
{x, y}, {t, 0, 10}]
{{x -> InterpolatingFunction[[0., 10.], <>],
  y -> InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]}}
k=%
{{x -> InterpolatingFunction[[0., 10.], <>],
  y -> InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]}}
k[[1]][[1]][[2]]
InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]
u2=%
InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]
k[[1]][[2]][[2]]
InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]
v2=%

```

```

InterpolatingFunction[[0., 10.], <>]
ParametricPlot[{u2[t], v2[t]}, {t, 0, 10}]

```

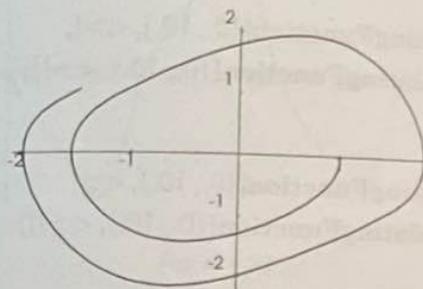


Figura 6.20

Podemos representar graficamente as duas soluções simultaneamente no plano de fase

```

ParametricPlot[{{u1[t], v1[t]}, {u2[t], v2[t]}},
{t, 0, 10}]

```

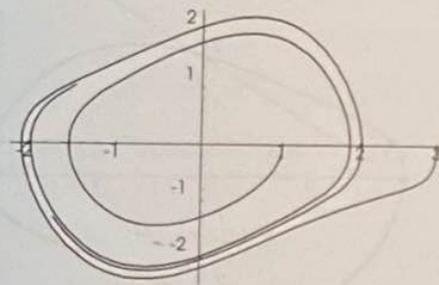


Figura 6.21

Vemos que a solução periódica possui condição inicial x_0 próxima de 2. Vamos resolver para $x_0 = 2$.

```

NDSolve[
  x'[t] == y[t],
  y'[t] == -x[t] - 0.5((x[t])^2 - 1)y[t],
  x[0] == 2,

```

```

y[0]==0
},
{x,y},{t, 0, 10}]
{{x-> InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>],
  y-> InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>]}}

```

```

I=%
{{x-> InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>],
  y-> InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>]}}

```

```

u3 = 1[[1]][[1]][[2]]
InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>]

```

```

v3 = 1[[1]][[2]][[2]]
InterpolatingFunction[{0., 10.}, <>]

```

```

ParametricPlot[{u3[t], v3[t]}, {t,0,10}]

```

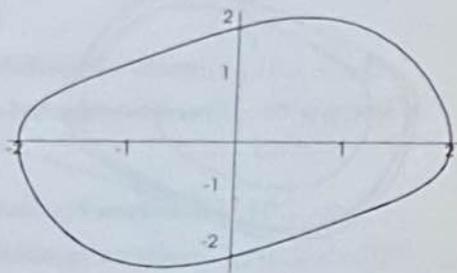


Figura 6.22

Vamos analisar numericamente esse gráfico nas vizinhanças do ponto $(2, 0)$. Plotamos o gráfico de $v_3(t)$

```
Plot[v3[t], {t, 0, 10}]
```

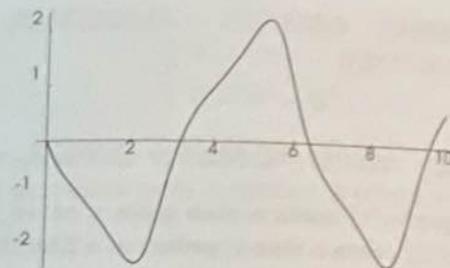


Figura 6.23

O gráfico de $v_3(t)$ corta o eixo t para t próximo de 6. Vamos ampliar essa região considerando o gráfico somente para $6.2 \leq t \leq 6.4$

```
Plot[v3[t], {t, 6.2, 6.4}]
```

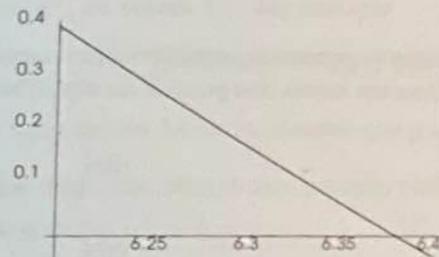


Figura 6.24

A seguir vamos calcular a raiz de $v_3(t)$ com maior precisão, e o ponto em que a solução $(u_3(t), v_3(t))$ volta a cruzar o eixo- u . Para isso construímos uma lista com valores entre 6.35 e 6.4 e calculamos os valores de $u_3(t)$ e $v_3(t)$ nos valores da lista.

```
Table[6.35 + 0.01 n, {n, 0, 5}]
```

```
{6.35, 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.4}
```

```
g=%
```

```
{6.35, 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.4}
```

```
v3[g]
```

{0.0596495, 0.0388912, 0.0184385, -0.00171059,
-0.0215587, -0.0411083}

u3[g]

{2.00153, 2.00202, 2.00231, 2.00239, 2.00227, 2.00196}

temos portanto que $v_3(t)$ corta o eixo para t entre 6.37 e 6.38 e a solução $(u_3(t), v_3(t))$ corta o eixo- u próximo a 2.00239.

Ao leitor interessado em obter informações gerais sobre o software Mathematica, sugerimos o livro: T.W. Gray e J. Glynn, "The Beginner's Guide to Mathematica", Version 2, Addison-Wesley Publ. Co. (1992).

6.5. Exercícios

1. Localize e classifique os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas. Esboce o plano de fase em torno dos pontos de equilíbrio.

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = x - 5y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y - 2xy \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} \dot{x} = ye^y \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases}$$

2. Ache uma integral primeira para o sistema (a) acima, isto é, determine uma função $V(x, y)$ tal que as soluções do sistema (a) "moram" nas curvas de níveis de V , $V(x(t), y(t)) \equiv c, \forall t$. (Sugestão: Procure V da forma: $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$).

3. Transforme a equação do oscilador harmônico

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

num sistema no plano de fases (x, y) , e estude os tipos de singularidades que ocorrem, conectando-as com as noções de amortecimento forte, crítico e oscilatório.

4. O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

é conhecido como *sela do macaco*. Mostre que $V(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é uma integral primeira para o sistema e esboce o plano de fase em torno da origem.

5. Compare os planos de fase dos sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$$

Em ambos temos $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.

6. Se $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 , são tais que

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e $\dot{x} = f(x)$ tem uma órbita fechada, mostre que g tem um zero.

7. Mostre que as equações abaixo têm solução periódica

$$(a) \quad \ddot{u} - (1 - u^2)\dot{u} + u^5 = 0$$

$$(b) \quad \ddot{u} + (u^2 - 2)\dot{u} + u + \sin u = 0$$

8. Mostre que o sistema abaixo tem uma solução periódica:

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 9) \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 9).$$

(Neste caso, pode-se resolver explicitamente o sistema e determinar essa solução; use coordenadas polares).

9. Mostre que o sistema

$$\dot{x} = -y + xf(r)/r, \quad \dot{y} = x + yf(r)/r, \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

tem soluções periódicas, correspondendo aos zeros de $f(r)$. Determine essas soluções nos casos abaixo e discuta a estabilidade dos ciclos: (i) $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$; (ii) $f(r) = (r-4)^2(r^2 - 8r + 15)$.

10. Determine regiões onde os sistemas abaixo não têm soluções periódicas

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 + y + y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - xy^4 + y^3 \\ \dot{y} = x^3 + y - yx^4 \end{cases}$$

6.6. Aplicações

6.6.1 O Pêndulo

A equação que representa o problema das oscilações de um pêndulo simples livre sem amortecimento, deduzida na seção 4.5, é a seguinte:

$$m\ell \ddot{\theta} + mg \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (6.28)$$

onde m é a massa fixada na extremidade inferior do fio de comprimento ℓ , e θ é a coordenada angular contada a partir da vertical no sentido anti-horário, como indica a figura a seguir:

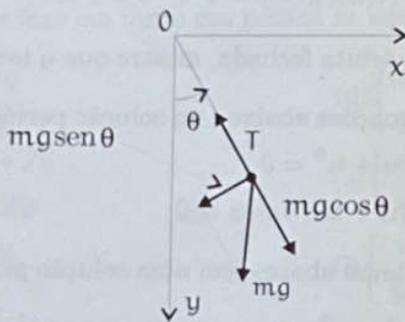


Figura 6.25

A equação (6.28) não é linear. Se, por um lado, esse fato dificulta a resolução da equação, por outro, foi um notável estímulo para o desenvolvimento de técnicas não lineares, como veremos neste capítulo.

Uma linearização da equação (6.28) pode ser conseguida, substituindo-se $\operatorname{sen} \theta$ por θ , o que necessariamente restringe sua aplicabilidade ao caso de pequenas oscilações θ . A equação (6.28) se torna:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0, \quad (6.29)$$

que é, então um modelo matemático para representar o fenômeno das pequenas oscilações do pêndulo. A equação (6.29) é do tipo do oscilador harmônico simples estudado na seção 4.5. Sua solução é:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad (6.30)$$

e que diz que as oscilações são periódicas de amplitude A e frequência circular $\omega = \sqrt{g/\ell}$. [A frequência circular é uma expressão bastante usada e representa o número de oscilações em 2π unidades de tempo; lembre que a frequência, como vimos na seção 4.5, é o número de oscilações por unidade de tempo, a qual seria pois $\omega/2\pi$]. Assim o período das oscilações é

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (6.31)$$

mostrando que o período é o mesmo, qualquer que seja a amplitude. Esse fato é conhecido como a *lei do isocronismo das pequenas oscilações*, supostamente descoberta por Galileu observando as oscilações dos lustres da catedral de Pisa... A fórmula (6.31) nos diz que o pêndulo que bate o segundo, isto é, aquele cujo período é 2 segundos, tem comprimento aproximadamente igual a 1 metro.

A linearização imposta à equação (6.28) é muito forte. Seria desejável tratar o problema em sua forma não linear original, possibilitando o estudo de grandes oscilações e até mesmo o caso de pêndulos realizando rotações completas em torno do ponto de suspensão 0. E isso é o que faremos a seguir, começando em i) abaixo com o estudo das oscilações do pêndulo no plano de fases e prosseguindo em ii) com o estudo do período do pêndulo para grandes oscilações.

i) **O estudo das oscilações do pêndulo no plano de fases.** Mostraremos, inicialmente, que o estudo da equação (6.28) do movimento do pêndulo, que agora escrevemos como:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (6.32)$$

pode ser reduzido à consideração de uma equação diferencial de 1ª ordem: equação (6.34) abaixo. De fato, multiplicando-se a equação

(6.32) por $\dot{\theta}$ obtemos:

$$\theta \ddot{\theta} + \omega^2 (\sin \theta) \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) - \omega^2 \frac{d}{dt} \cos \theta = 0, \quad (6.33)$$

de onde se segue

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2(t) - \omega^2 \cos \theta(t) = c, \quad (6.34)$$

onde a constante c pode ser obtida a partir de valores de θ e $\dot{\theta}$ em um dado instante t_0 . Temos, assim, que toda solução $\theta(t)$ de (6.32) é também solução de (6.34), com c escolhido adequadamente. A recíproca é quase verdadeira: se $\theta(t)$ for solução de (6.34), então, por derivação, obtemos a equação em (6.33), a qual implica que $\theta(t)$ é solução de (6.32) ou $\dot{\theta} = 0$. Neste último caso, segue-se que $\theta(t) = \theta_1 = \text{constante}$, a qual só será solução de (6.32) caso $\theta_1 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Observe, entretanto, que para qualquer constante θ_1 , $\theta(t) = \theta_1$ é solução de (6.34) com $c = -\omega^2 \cos \theta_1$. Conclusão: as soluções não constantes de (6.32) e (6.34) são as mesmas, e, como já sabemos que as únicas soluções constantes de (6.32) são $\theta(t) = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$, o nosso estudo de (6.32) se reduz ao estudo de (6.34). As soluções constantes correspondem ao pêndulo parado. Quando k é par, o pêndulo está parado em sua posição mais baixa, essa posição é estável. Quando k é ímpar, o pêndulo está parado em sua posição mais alta e essa posição é instável.

Um parêntesis: A equação (6.34) tem um significado físico. Escolhendo o potencial mgy , onde y é a ordenada da massa m , temos que a energia do movimento é

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta,$$

e assim a equação (6.34) expressa a lei da conservação da energia.

No plano de fases (θ, v) , a equação (6.32) se transforma no sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \theta, \end{cases} \quad (6.35)$$

e portanto, a equação (6.34) se torna

$$\frac{1}{2} v^2 - \omega^2 \cos \theta = c. \quad (6.36)$$

A primeira equação em (6.35) será importante para dar o sentido em que a curva é percorrida quando t varia.

Observemos, inicialmente, que a constante c não pode ser arbitrária. De fato, segue-se de (6.36) que $c > -\omega^2$, pois de outro modo:

$$\frac{1}{2} v^2 \leq \omega^2 \cos \theta - \omega^2 = \omega^2 (\cos \theta - 1) \leq 0$$

o que implica $v = 0$ e $\theta = k\pi$, que são as soluções constantes de (6.32) já conhecidas.

Se $-\omega^2 < c < \omega^2$, então, segue-se de (6.36) que

$$-\omega^2 \cos \theta \leq c \Rightarrow \cos \theta \geq -\frac{c}{\omega^2} > -1$$

mostrando que, para cada curva solução de (6.36), θ varia num intervalo

$$2k\pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2k\pi + \theta_0 \quad 0 \leq \theta_0 = \arccos \left(-\frac{c}{\omega^2} \right) < \pi.$$

Observando que, nos pontos extremos $\theta = 2k\pi \pm \theta_0$, a equação (6.36) implica $v = 0$, concluímos que, neste caso, as curvas soluções de (6.36) são fechadas, tendo o aspecto de elipses. Fisicamente, isso corresponde à oscilação do pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável; o fenômeno poderia começar com o deslocamento do pêndulo para uma posição θ , $0 < \theta < \pi$, e aí ser abandonado.

Se $\omega^2 < c$, então, segue-se de (6.36) que v nunca se anula, pois $\omega^2 \cos \theta + c > -\omega^2 + \omega^2 = 0$. Logo (6.36) representa duas curvas limitadas

$$v(\theta) = \pm \sqrt{2(\omega^2 \cos \theta + c)}$$

definidas para $-\infty < \theta < \infty$. Fisicamente, isso corresponderia a um movimento de rotação da massa em torno do ponto de suspensão; o fenômeno poderia ser originado por uma grande velocidade inicial.

Finalmente, se $c = \omega^2$, então (6.36) nos dá

$$v^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

que define duas curvas do tipo senóide, chamadas *separatrizes* e indicadas na figura 6.26 com um traço mais forte. Observe que essas curvas passam através das soluções constantes $\theta = (2k+1)\pi$, o que é uma indicação de que a curva inteira não é solução de (6.32). (Por quê?). De fato, mostraremos a seguir que

$$v(\theta) = 2\omega \cos \frac{\theta}{2} \quad -\pi < \theta < \pi$$

define uma solução de (6.32) para todo t . [Um argumento semelhante é válido para outros intervalos $(2k-1)\pi < \theta < (2k+1)\pi$, e para $v(\theta) = -2\omega \cos \frac{\theta}{2}$]. Para ver isso, basta observar que, sendo $\dot{\theta} = 2\omega \cos(\theta/2)$, o tempo necessário para a massa m ir da posição $\theta = 0$ à posição $\theta = \pi$ é

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2\omega \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \sec \theta d\theta = +\infty.$$

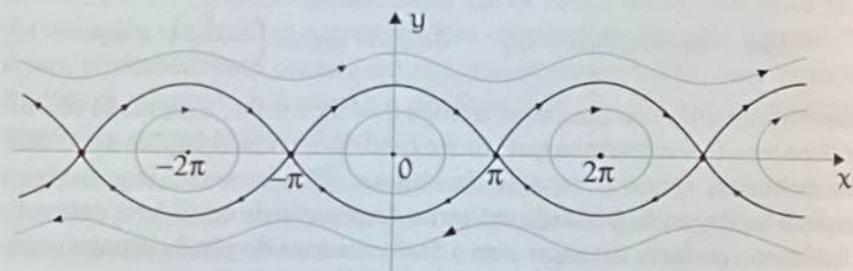


Figura 6.26

ii) **O período do pêndulo nas grandes oscilações.** Suponhamos que no instante $t = 0$ o pêndulo é deslocado de um ângulo θ_0 , $-\pi < \theta_0 < 0$, e aí é abandonado, começando assim o movimento. Logo $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, e conseqüentemente a constante $c = -\omega^2 \cos \theta_0$. Assim, (6.34) se escreve como

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (6.37)$$

de onde podemos concluir o seguinte: a) $\cos \theta \geq \cos \theta_0$, ou seja $\theta_0 \leq \theta \leq -\theta_0$, b) quando $\theta = -\theta_0$, então $\dot{\theta} = 0$, c) o movimento do pêndulo é periódico com amplitude $|\theta_0|$. A equação (6.37) é separável e pode ser escrita como

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \omega dt \quad (6.37')$$

a qual é válida enquanto θ for > 0 , isto é, para $\theta_0 < \theta < -\theta_0$. Logo, integrando (6.37') obtemos

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \omega t. \quad (6.38)$$

A expressão no 1º membro de (6.38) é uma integral elíptica. Vamos levá-la a uma forma mais conhecida. Inicialmente usamos a identidade

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

e a seguir, introduzindo a variável ϕ definida por

$$\sin \phi \left| \sin \frac{\theta_0}{2} \right| = \sin \frac{\theta}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},$$

obtemos a partir de (6.38):

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \omega t, \quad k = \left| \sin \frac{\theta_0}{2} \right|. \quad (6.39)$$

A função

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (6.40)$$

é chamada a *integral elíptica de 1ª ordem* (forma de Legendre). Para calcular o período do pêndulo, usamos (6.39) com $t = T/4$ e $\phi = \pi/2$:

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (6.41)$$

A integral em (6.39) não pode ser escrita em termos de funções elementares [cf. parte iii) abaixo], mas podemos calculá-la aproximadamente,

usando o desenvolvimento binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \phi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \phi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \phi + \dots \quad (6.42)$$

Logo, para obter T integramos a série de potências em (6.42):

$$T = \frac{4}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right]$$

e daí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right],$$

$$k = \left| \sin \frac{\theta_0}{2} \right|, \quad (6.43)$$

que é a expressão correta para o período do pêndulo, mostrando sua dependência da amplitude. Vemos, pois, que mesmo para pequenas oscilações, o isocronismo é apenas aproximado: compare (6.31) e (6.43). Assim, a expressão

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \quad (6.44)$$

é uma melhor aproximação que (6.31); o erro percentual entre tomar (6.31) ou (6.44) é

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}, \quad \text{onde } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

que, para $\theta_0 = 2^\circ$, dá 0,000076147. Esse erro é desprezível nas medidas correntes, mas se torna importante nas medidas de precisão, como na determinação de g . Um tal erro acumulado no decorrer de 1 dia = 86400 segundos dá 6,58 segundos, que é um atraso inadmissível para um bom Ω ...

iii) **Integrais e funções elípticas.** O leitor que viu a função (6.40) pela primeira vez deve ter se perguntado por que a chamam elíptica.

Para satisfazer essa curiosidade vamos contar um pequeno trecho de História de Matemática. Integrais do tipo (6.40) apareceram durante o século XVIII em problemas de determinação do comprimento de algumas curvas. Em particular, no problema de retificação da elipse, [retificar uma curva significa essencialmente achar seu comprimento], daí o nome que essas integrais receberam. Vejamos qual é a integral que obtemos no caso da retificação da elipse:

$$x = a \cos \theta \quad y = -b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad a > b.$$

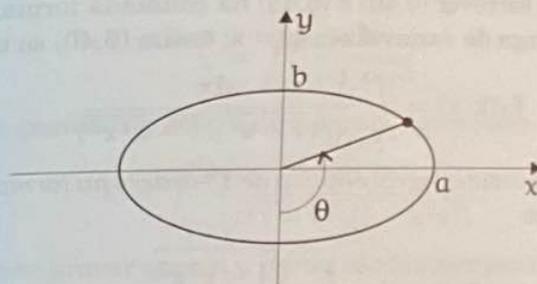


Figura 6.27

O vetor tangente à elipse em cada ponto é

$$\tau(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$$

cujo módulo é

$$|\tau(\theta)| = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta},$$

e daí, lembrando que $(a^2 - b^2)/a^2 = e^2$, onde e é a excentricidade da elipse, obtemos

$$|\tau(\theta)| = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}.$$

Logo, o comprimento de arco da elipse entre $\theta = 0$ e θ é

$$\int_0^\theta |\tau(\theta)| d\theta = a \int_0^\theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

e daí, o comprimento da elipse é

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

A integral

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \, d\phi \quad (6.45)$$

é chamada *integral elíptica de 2ª ordem* (forma de Legendre).

Integrais do tipo (6.40) e (6.45) foram muito estudadas durante o século XVIII, particularmente por Legendre. Entretanto, os resultados mais profundos foram conseguidos por Abel e Jacobi, no começo do século XIX. Antes de explicar o que esses dois grandes matemáticos fizeram, vamos escrever (6.40) e (6.45) na chamada forma de Jacobi, usando a mudança de variável $\operatorname{sen} \phi = x$; assim (6.40) se torna

$$F_1(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (6.45)$$

que é conhecida como *integral elíptica de 1ª ordem na forma de Jacobi*, e (6.45) se torna

$$E_1(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} \, dx \quad (6.46)$$

conhecida como *integral elíptica de 2ª ordem na forma de Jacobi*. A constante $0 < k < 1$ é o *módulo* da integral elíptica. Quando os limites de integração são $\phi = \pi/2$ e $x = 1$, dizemos que as integrais são *completas*.

Abel fez a seguinte observação: no caso extremo $k = 0$, ambas as integrais elípticas em (6.45) e (6.46) se tornam

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x,$$

e o estudo da função inversa arco-seno é bastante facilitado pela consideração da função seno. Assim, ele se propôs a estudar as inversas de F_1 e E_1 . Introduz-se a função

$$\phi = \operatorname{am} u$$

que é definida por

$$u = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}.$$

A seguir se definem as *funções elípticas*:

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sen}(\operatorname{am} u),$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cos}(\operatorname{am} u),$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}.$$

Uma série de propriedades das funções elípticas decorre imediatamente da definição. E o mais fascinante é que as funções elípticas têm o seu " π ". Observe que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

e que 2π é o período do seno e do cosseno. Agora, seja

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Então, pode-se provar que $\operatorname{sn} u$ e $\operatorname{cn} u$ são funções periódicas de período $4K$. Abel não ficou aí. A teoria das funções complexas naquela época tomava forma nas mãos de Cauchy. Assim, informado da teoria de Cauchy, ele estendeu $\operatorname{sn} u$ e $\operatorname{cn} u$ para valores complexos de u e provou que elas eram funções meromorfas duplamente periódicas. Vários dos resultados de Abel foram obtidos independentemente por Jacobi. Na segunda metade do século XIX, Weierstrass e Hermite fizeram contribuições marcantes à teoria das funções elípticas. A teoria das funções elípticas ocupa hoje um lugar de destaque em Matemática, e constitui um belo exemplo de uma teoria que surgiu de problemas práticos. Em virtude de suas aplicações, as funções elípticas estão tabeladas para vários valores de k e de x . Cf., por exemplo, E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch, "Tables of Higher Functions", McGraw Hill Book Company, New York (1960).

As funções elípticas aparecem em outros problemas aplicados, como por exemplo, em fenômenos de capilaridade, em problemas de freios mecânicos, no problema da forma da corda de saltar e no problema da *elástica* (a curva assumida por um estrutura retilínea sujeita a forças compressivas). Ao leitor interessado, recomendamos o livro de H.W. Reddick e F.H. Miller, "Advanced Mathematics for Engineers", John Wiley & Sons, New York (1960).

iv) **Pêndulo livre com amortecimento.** A equação diferencial para o movimento do pêndulo simples com amortecimento e sem a ação de forças externas é:

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad (6.47)$$

onde supomos a força resistiva proporcional à velocidade. Pode-se tratar de modo análogo o caso de força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade. A equação (6.47) é equivalente ao sistema no plano de fases:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\mu v - \omega^2 \sin \theta. \end{cases} \quad (6.48)$$

As singularidades de (6.48) são $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Vamos determinar a natureza dessas singularidades. Primeiramente, consideremos a origem; o sistema linear correspondente a (6.48) é

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \theta - \mu v. \end{cases} \quad (6.49)$$

Os valores próprios são dados por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda - \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = \mu^2 - 4\omega^2.$$

Assim teremos:

- (i) Se $\mu > 2\omega$, os valores próprios são reais, distintos e negativos, o que implica que a origem é um ponto nodal estável para o sistema linear (6.49) e, conseqüentemente, para o sistema não linear (6.48) também.
- (ii) Se $\mu = 2\omega$, os valores próprios são reais negativos e iguais. Logo, a origem é um ponto nodal para o sistema linear (6.49). E neste caso, podemos apenas afirmar que a origem é um ponto nodal ou espiral para o sistema não linear (6.48).
- (iii) Se $\mu < 2\omega$, os valores próprios são complexos com parte real negativa. Logo, a origem é um ponto espiral para ambos os sistemas (6.49) e (6.48).

Para estudar as outras singularidades, desenvolvemos $\sin \theta$ em série de Taylor na vizinhança de

$$k\pi : \sin \theta = (-1)^k (\theta - k\pi) + f(\theta)$$

onde $f(\theta) = o(\theta - k\pi)$. Logo (6.48) se escreve como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 (-1)^k (\theta - k\pi) - \mu v + f(\theta) \end{aligned}$$

e daí os valores próprios são dados por

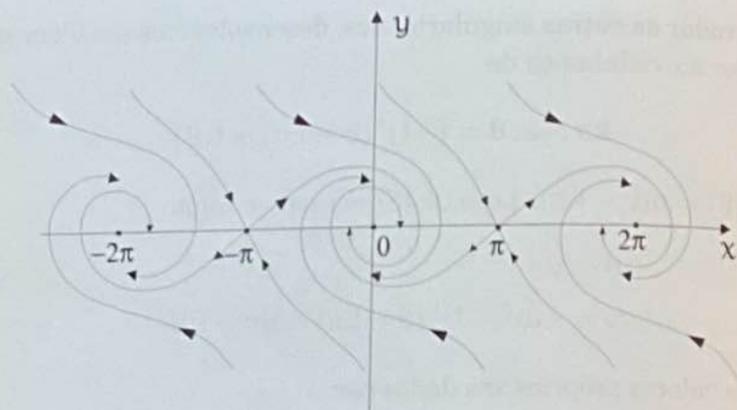
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & -\lambda - \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + (-1)^k \omega^2 = 0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = \mu^2 - 4(-1)^k \omega^2.$$

Logo, se k for ímpar, o discriminante é > 0 , o que implica que os dois auto-valores são reais e com sinais diferentes, e teremos então que $(k\pi, 0)$ é ponto de sela. Se k for par, o ponto singular $(k\pi, 0)$ tem o mesmo tipo que $(0, 0)$.

Vamos descrever o espaço de configurações no caso de $\mu < 2\omega$. Suponha que o movimento se inicia em $\theta = 0$ com uma certa velocidade $v_1 > 0$. (a) Se essa velocidade v_1 não for muito grande, o pêndulo sobe até uma certa amplitude θ_1 , onde a velocidade é zero. Aí ele regressa, vindo até uma amplitude θ_2 ($|\theta_2| < \theta_1$), onde a velocidade é zero. E assim temos um movimento oscilatório amortecido. (b) Se o pêndulo partir de A com velocidade inicial v_2 grande, o pêndulo sobe e ao passar pela posição mais alta (B) ainda tem velocidade positiva. Assim, o pêndulo vem até a posição $\theta = 2\pi$, onde chega com velocidade positiva. Caso esta última velocidade seja grande, repete-se o fenômeno; caso seja pequena teremos a situação descrita em (a). (c) O que delimita "velocidade grande" de "velocidade pequena" é a velocidade crítica v_c , assim definida: caso ao pêndulo seja impressa essa velocidade na posição mais baixa, ele se aproximará assintoticamente (i.e., quando $t \rightarrow \infty$) da posição mais alta sem nunca a atingir.



Pêndulo com Amortecimento

Figura 6.28

v) **Sistemas hamiltonianos com um grau de liberdade.** Ao estudar o movimento do pêndulo livre sem amortecimento, equação (6.28) ou o sistema (6.35), a expressão (6.36)

$$\frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos \theta$$

desempenhou um papel muito importante. Essa expressão (6.36), que designamos por $H(\theta, v)$, chama-se *hamiltoniana* do sistema (6.35). Observe que (6.35) pode se escrever como

$$\dot{\theta} = H_v \quad \dot{v} = -H_\theta, \quad (6.50)$$

que é um *sistema hamiltoniano* com um grau de liberdade. Sistemas hamiltonianos com mais graus de liberdade aparecem na formulação lagrangiana da Mecânica Clássica.

Vamos generalizar, ligeiramente, a situação acima. Dado um sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x, y) \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (6.51)$$

uma função $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é uma *integral primeira* de (6.51) se as órbitas de (6.51) são curvas de nível de $H: H(x, y) = c$. Um ponto (x, y) é *crítico* para H se

$$H_x^2 + H_y^2 = 0.$$

Pelo teorema das funções implícitas, as curvas, definidas por $H(x, y) = c$ nos pontos não críticos, são regulares e, conseqüentemente, soluções do sistema (6.51). Observe que uma curva de nível de H pode conter várias órbitas, se contiver pontos críticos.

Um sistema (6.51) é *exato* se

$$f_x + g_y = 0. \quad (6.52)$$

Proposição. *Todo sistema exato tem uma integral primeira H com a propriedade*

$$H_y = f \quad \text{e} \quad H_x = -g. \quad (6.53)$$

[Neste caso, a integral H chama-se a hamiltoniana do sistema].

Demonstração: A expressão (6.52) diz que o campo vetorial $(-g, f)$ é fechado. Logo pela Proposição 3.15 da seção 3.3, esse campo é gradiente; seja $H(x, y)$ seu potencial. Então, temos (6.53).

6.6.2 O Modelo Predador-Presa de Volterra para a Dinâmica de Duas Populações

Sejam $x(t)$ a população de presas e $y(t)$ a população de predadores. Suponha que os meios de subsistência para as presas são ilimitados e que seu crescimento não teria nenhum fator inibidor, não fosse a presença dos predadores. Logo, caso não houvesse predadores, a população de presas cresceria de acordo com a lei de crescimento exponencial $\dot{x} = \alpha x$, onde $\alpha > 0$ é uma constante. Entretanto, a presença dos predadores afeta esse crescimento: supõe-se que a taxa de crescimento da população x diminua linearmente quando a população y aumenta. Assim, temos

$$\dot{x} = (\alpha - by)x, \quad (6.54)$$

onde $b > 0$ é uma constante.

Por outro lado, supomos que os predadores se alimentam exclusivamente das presas, e que sem elas, a espécie desapareceria. Então, sem presas, a população y decresceria de acordo com a lei exponencial $\dot{y} = -cy$, onde $c > 0$ é uma constante. Entretanto, a presença de presas modifica essa situação: supõe-se que a taxa de crescimento da população y aumente linearmente quando a população x aumenta.

Assim temos

$$\dot{y} = (-c + dx)y, \quad (6.55)$$

onde $d > 0$ é uma constante.

Podemos justificar a introdução dos termos $-bxy$ e $+dxy$ nas equações de crescimento das populações x e y do seguinte modo. O número de encontros entre indivíduos das duas espécies num intervalo unitário de tempo é proporcional a xy : digamos que seja igual a αxy . Esses encontros resultam negativos para as presas; digamos que a população x diminua de β_1 membros para cada n encontros. Logo, a população x diminua de

$$\frac{\beta_1}{n} \alpha xy \equiv bxy$$

membros por unidade de tempo. De modo análogo, esses encontros resultam benéficos para os predadores; digamos que a população y aumenta de β_2 membros para cada n encontros. Logo, a população y aumenta de

$$\frac{\beta_2}{n} \alpha xy \equiv dxy$$

membros por unidade de tempo. O coeficiente b mede a susceptibilidade da espécie x às ações predatórias, e o coeficiente d mede a habilidade predatória da espécie y .

Vamos estudar as soluções (órbitas) de (6.54)-(6.55) no plano (x, y) . Inicialmente vemos que há duas singularidades: $(0, 0)$ e $(c/d, a/b)$. Esses pontos são as *populações de equilíbrio*. E o campo vetorial dado pelos segundos membros das equações tem o aspecto da figura abaixo

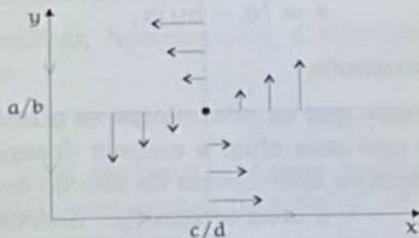


Figura 6.29

Para determinar a natureza dessas singularidades, utilizemos as aproximações lineares. No caso de $(0, 0)$, o sistema linear correspondente é

$$\dot{x} = \alpha x \quad \dot{y} = -cy$$

o que mostra que a origem é um ponto de sela. Para a outra singularidade, fazemos a mudança de variáveis

$$u = x - \frac{c}{d} \quad v = y - \frac{a}{b}$$

e obtemos o sistema

$$\dot{u} = -b \left(u + \frac{c}{d} \right) v \quad \dot{v} = d \left(v + \frac{a}{b} \right) u$$

cujas partes lineares são

$$\dot{u} = -\frac{bc}{d} v \quad \dot{v} = \frac{ad}{b} u. \quad (6.56)$$

Segue-se pois, que $(c/d, a/b)$ é um centro para o sistema linear, e conseqüentemente seria um centro ou um ponto espiral para o sistema não linear. Mostraremos mais abaixo que se trata realmente de um *centro*. As equações (6.56) podem ser integradas e conduzem às expressões

$$ad^2 u^2 + b^2 cv^2 = k^2$$

que são elipses com centro em $(c/d, a/b)$. Portanto, em uma primeira aproximação, as órbitas de (6.54)-(6.55) têm a forma de elipses na vizinhança do ponto singular $(c/d, a/b)$.

Para obter as órbitas do sistema (6.54)-(6.55), vamos escrevê-lo na forma de uma equação separável no plano (x, y) :

$$\frac{a - by}{y} y' = -\frac{c - dx}{x},$$

a qual pode ser integrada imediatamente

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln K$$

ou seja

$$y^a e^{-by} = Kx^{-c} e^{dx} \quad (6.57)$$

onde a constante K pode ser obtida em função de dados iniciais x_0, y_0 :

$$K = y_0^a x_0^c e^{-by_0} e^{-dx_0}. \quad (6.58)$$

Nem y , nem x podem ser explicitados em termos de funções elementares na equação (6.57). Para se ter uma idéia da curva representada por (6.57), vamos usar um método gráfico devido a Volterra. Seguimos a apresentação de G.F. Simmons. Introduzimos duas novas variáveis

$$z = y^a e^{-by} \quad \omega = Kx^{-c} e^{dx} \quad (6.59)$$

e traçamos seus gráficos nos quadrantes (y, z) e (x, ω) da figura abaixo.

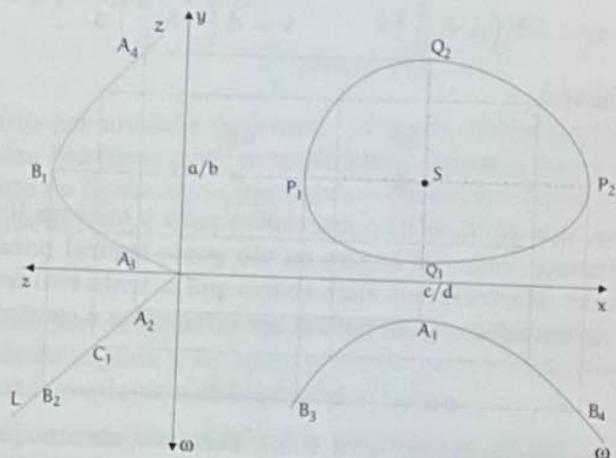


Figura 6.30

Fazemos as seguintes observações:

- (i) A função z tem um máximo no ponto $y = a/b$ e aí $z_{\max} = (a/be)^a$.
- (ii) A função ω tem um mínimo no ponto $x = c/d$ e aí $\omega_{\min} = K(de/c)^c$.
- (iii) Afirmamos que $\omega_{\min} \leq z_{\max}$. De fato, usando (6.58) obtemos

$$\omega_{\min} \leq Kx_0^{-c} e^{dx_0} = y_0^a e^{-by_0} \leq z_{\max}.$$

- (iv) Se a órbita é diferente da solução de equilíbrio, uma das desigualdades acima é estrita.

A seguinte construção gráfica mostra que a órbita é uma curva fechada:

- (i) Chamemos de W a curva $\omega(x)$, Z a curva $z(y)$ e L a reta bissetriz do quadrante (z, ω) , isto é, o gráfico da função $z = \omega$.
- (ii) Pelo ponto A_1 da curva W traçamos uma paralela ao semi-eixo x até encontrar a reta L , em A_2 . Daí uma paralela ao semi-eixo y até encontrar a curva Z em dois pontos A_3 e A_4 . As retas paralelas ao semi-eixo x passando por A_3 e A_4 interseccionam a reta passando por A_1 e paralela ao semi-eixo y em dois pontos Q_1 e Q_2 . Esses dois pontos são os pontos extremos da órbita na direção y .
- (iii) Pelo ponto B_1 da curva Z traçamos uma paralela ao semi-eixo y até encontrar a reta L , em B_2 . Daí uma paralela ao semi-eixo x até encontrar a curva W em dois pontos B_3 e B_4 . As retas paralelas ao semi-eixo y passando por B_3 e B_4 interseccionam a reta passando por B_1 e paralela ao semi-eixo x em dois pontos P_1 e P_2 . Esses pontos são os extremos da órbita na direção x .
- (iv) Para obter outros pontos da órbita, começamos com qualquer ponto C_1 na reta L entre A_2 e B_2 , e procedendo como em (ii) ou (iii) obtemos quatro pontos da órbita.

Conclusão. As populações de predadores e presas oscilam periodicamente. Observe que a curva não é necessariamente simétrica com relação ao eixo $x = c/d$ ou ao eixo $y = a/b$. Assim o espaço de configurações tem o aspecto indicado na figura abaixo

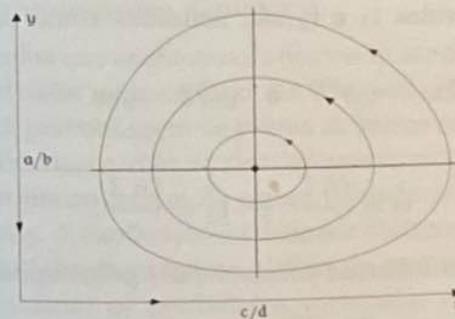


Figura 6.31

Períodos dos ciclos. Vamos obter esses períodos para situações de pequenas flutuações em torno da singularidade $(c/d, a/b)$. Como vimos acima, os ciclos são aproximadamente elipses. Vamos, porém, escrevê-las em coordenadas paramétricas. As equações (6.56) nos dão:

$$\ddot{u} + acu = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{v} + acv = 0,$$

que são equações do tipo do oscilador harmônico estudadas na seção 4.5. Logo, a solução da primeira equação pode ser expressa como

$$u(t) = L \cos(\sqrt{ac} t + \alpha) \quad (6.60)$$

onde L e α são constantes. Daí:

$$v(t) = L \sin(\sqrt{ac} t + \alpha). \quad (6.61)$$

Logo, o período independe da amplitude L (desde que ela não seja "grande") e é igual a

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}, \quad (6.62)$$

que é a *lei do isocronismo das pequenas flutuações*. Como se vê o período depende apenas das taxas de crescimento das populações. Introduzimos, agora, a noção de *meia-vida de uma espécie*, cujo crescimento é regido pela lei exponencial. Suponha que as populações $x(t)$ e $y(t)$ são dadas por

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 e^{-ct}.$$

Então, as meias-vidas t_1 e t_2 são definidas como as soluções das equações

$$2x_0 = x_0 e^{at_1} \quad \text{e} \quad y_0/2 = y_0 e^{-ct_2}$$

ou seja

$$t_1 = \frac{\ln 2}{a} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{\ln 2}{c}.$$

Portanto, o período T do ciclo pode ser dada pela expressão

$$T = \frac{2\pi\sqrt{t_1 t_2}}{\ln 2} \cong 9,06\sqrt{t_1 t_2}.$$

Populações Médias. As equações (6.54) e (6.55) podem ser escritas nas formas abaixo

$$\frac{d}{dt}(\ln x) = a - by \quad \frac{d}{dt}(\ln y) = -c + dx.$$

Integrando essas equações entre dois valores de t , t' e t'' , obtemos

$$\ln \frac{x(t'')}{x(t')} = a(t'' - t') - b \int_{t'}^{t''} y(t) dt,$$

$$\ln \frac{y(t'')}{y(t')} = -c(t'' - t') + d \int_{t'}^{t''} x(t) dt.$$

Se $t'' - t' = T$ obtemos:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} \quad \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}. \quad (6.63)$$

As expressões nos primeiros membros de (6.63) são as *populações médias* de cada espécie. Interpretemos (6.63).

Inicialmente, temos a *lei de conservação das populações médias*: essas populações médias permanecem constantes se os coeficientes de crescimento a das presas, de declínio c dos predadores, de defesa b das presas e de agressão d dos predadores permanecem constantes. A seguir, analisemos o problema de *perturbações das populações médias*. As expressões (6.63) nos dizem que, mantidos constantes os coeficientes b e d , uma destruição uniforme de membros das duas espécies beneficia as presas. De fato, destruir predadores significa aumentar c e destruir presas significa diminuir a .

Os resultados que acabamos de descrever são devidos a Volterra e foram desenvolvidos para explicar um fenômeno observado por D'Ancona, relativo à percentagem de peixes de várias espécies capturados no Adriático, durante e após a primeira guerra mundial. O fato observado era que a percentagem de peixes predadores havia aumentado durante a guerra. A explicação foi dada por Volterra, com o argumento de que a diminuição da pesca no período da guerra tinha necessariamente que beneficiar os predadores, no sentido de que a população média destes cresceria mais rapidamente que a população média das presas.

Um problema semelhante ocorre no uso de inseticidas, que matam indiscriminadamente insetos predadores e insetos presas; e se são estes que causam danos às plantações, o uso do inseticida pode ser negativo.