Lista de exercícios 5

MAT 111 - Cálculo I - BE

31 de maio de 2020

1. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto (1, 1).

2. 1) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado com respeito ao comprimento de um dos lados é a metade do perímetro.

2) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação ao seu raio é numericamente igual à área da esfera.

3. Um mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao raio r do círculo para:

1) r arbitrário;

2) $r = 200$m.

4. Uma escada de 13m está apoiada em uma parece. A base da escada está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede a uma taxa constante de 6m/min. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5m da parede? (Resposta: 2,5 m/min)

5. Ao meio dia o braco A está 64km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20km/h e o barco B navega para norte a 25km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13h e 12min? (Resp: -1 km/h)

6. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a altura. Sabendo que a areia é despejada a uma taxa de $0,01\text{m}^3$/min, qual a taxa de variação da altura do monte quando esta for de 3 metros? [*Lembrete:* volume do cone $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.] (Resp: $\frac{4}{900\pi} m^3/min$)

7. Uma lâmpada está no alto de um poste de 5m. Um menino de $1,6$m de altura se afasta do poste à velocidade de $1,2$m/s. A que taxa se move a ponta da sua sombra quando ele está a 6m do poste? A que taxa aumenta o comprimento da sua sombra? (Resp: 1,764m/s; 0,564m/s)

8. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de 2cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo? (Resp.: -1,6cm/min.)

9. Aumentando-se a aresta de um cubo ao longo do tempo, o seu volume cresce a uma taxa de $10\text{cm}^3/\text{min}$ num certo instante t_0. No instante t_0, sabendo que a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo? (Resp.: $\frac{4}{3}\,\text{cm}^2/\text{min}$.)

10. Calcule:

1) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

4) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{-4\pi}{3}\right)\right)$.

11. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

12. Qual a inversa da função $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$? Justifique.

13. Seja $f(x) = x + e^x$.

1) Mostre que f admite função inversa g.

2) Prove que o domínio e a imagem de f são iguais ao conjunto $\mathbb{R}$.

3) Supondo que g é contínua, mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{1}{1+e^{g(x)}}$.

4) Calcule $g'(1)$.

14. Seja $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

1) Mostre que f admite função inversa g.

2) Supondo g é contínua, mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

3) Calcule $g'(1)$.

15. Calcule a equação da reta tangente a $f(x)$ no ponto dado:

1) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, em $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, em $x = -1$.

16. Calcule as derivadas.

1) $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x^2)$;

2) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$;

3) $f(x) = x\operatorname{arcsen}(1-x)$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{x}\right)$;

5) $f(x) = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

6) $f(x) = (1+\operatorname{arctg} x)^2$.

7) $y = \operatorname{arctg} x$;

8) $f(x) = \operatorname{arcsen} 3x$;

9) $g(x) = \operatorname{arcsen} x^3$;

10) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$;

11) $y = 3\operatorname{arctg}(2x+3)$;

12) $y = \operatorname{arcsen} e^x$;

13) $y = e^{3x}\operatorname{arcsen} 2x$;

14) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$;

15) $y = x^2 e^{\operatorname{arctg} 2x}$;

16) $y = \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\cos 2x}$;

17) $y = e^{-3x} + \ln(\operatorname{arctg} x)$;

18) $f(x) = \dfrac{e^{-x}\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{tg} x}$.

17. Sabe-se que r é uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y = 6x - 1$. Determine r.

18. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

19. A reta s passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s. (*Definição*: A reta normal ao gráfico de $f(x)$ em $(p, f(p))$, é a reta que passa por $(p, f(p))$ e é perpendicular à reta tangente, e portanto o coeficiente angular será $m = -\frac{1}{f'(p)}$, se $f'(p) \neq 0$.

20. Sabe-se que r é uma reta que passa pela origem e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Determine r.

21. Sabe-se que r é uma reta que passa pelo ponto $(0, 2)$ e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$. Determine r.

22. Ache os pontos da curva $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10$ nos quais a reta tangente é horizontal.

23. A reta $x = a$ intercepta a curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor (ou valores) de a as retas tangentes a essas curvas em P e Q são paralelas?

24. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.

25. A reta x passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s.