Campos de Radiação I

[W. Panofsky & M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism, Cap. 14]

→[Bo Thidé; Electromagnetic Field Theory; Cap. 6]

Campos de Radiação

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\left[\left[\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,',t')}{\partial t'}\right]_{ret} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')\right] \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV'$$

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'}\right]_{ret} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} dV', \qquad [\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}]$$

Transformada de Fourier dos campos (Panofsky & Phillips and Thidé trabalham primeiro no domínio da frequência)

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}_{rad}(\vec{r},t) e^{i\omega t} dt$$

Transformada de Fourier de $\left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'}\right]_{ret}$

$$\left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right]_{ret} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)_{\omega} e^{-i[\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}'|]} d\omega$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}(\vec{r}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \rightarrow \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega')\vec{j}(\vec{r}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega'$$

$$\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega')\vec{j}(\vec{r}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, (-i\omega')\vec{j}(\vec{r}, \omega') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt\right]; \qquad \delta(\omega - \omega')$$

$$\therefore \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)_{\omega} = -i\omega \vec{j}(\vec{r}, \omega)$$

Então a expressão para a Transformada de Fourier do campo magnético fica

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{1}{2\pi}\int dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\left[\left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'}\right]_{ret} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{1}{2\pi}\int dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)_{\omega'}}_{-i\omega'\vec{j}(\vec{r},\omega')} e^{-i\left(\omega' t - k|\vec{r}-\vec{r}\prime|\right)}\right] \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

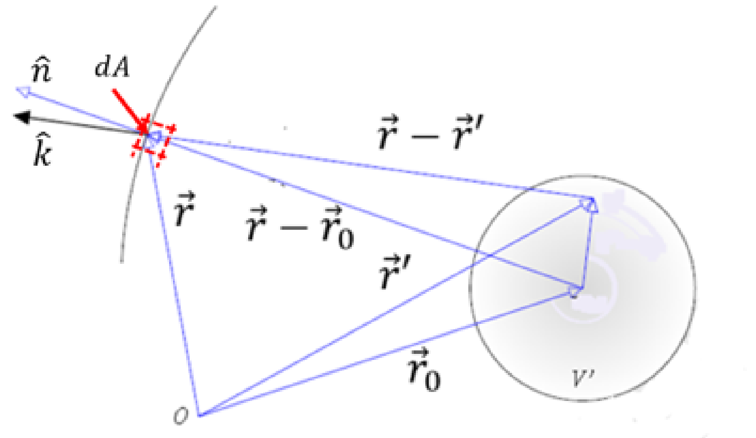
$$= -i\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int dV' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \omega' \vec{j}(\vec{r},\omega')\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega\prime)t}\, dt\right] e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\prime|} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

Portanto (Panofsky & Phillips – Eq. 14.43’; Thidé – Eq. 5.25)

$$\therefore\ \vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int \vec{j}(\vec{r}',\omega) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\prime|} dV'$$

Para o campo elétrico, a transformada fica (fazer como exercício)

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{[\vec{J}(\vec{r}',\omega)\times(\vec{r}-\vec{r}')]\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|(\vec{r}-\vec{r}')|^3}\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$



<u>Aproximações para grandes distâncias das fontes</u>

$$sup|\vec{r}'-\vec{r}_0| \ll inf|\vec{r}-\vec{r}'|$$

Definição: $\hat{k} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$; $\vec{k} = k\hat{k}$

$$\Rightarrow k|\vec{r}-\vec{r}'| = \vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = \vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) - \vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r}_0)$$

$$\therefore k|\vec{r}-\vec{r}'| \approx k|\vec{r}-\vec{r}_0| - \vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r}_0)$$

Em todos os outros termos, fora a exponencial, $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx |\vec{r}-\vec{r}_0|$; portanto

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\int [\vec{J}(\vec{r}',\omega)\times\hat{k}]\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r}_0)} dV'$$

Fazendo o mesmo para o campo elétrico (fazer como exercício), obtemos

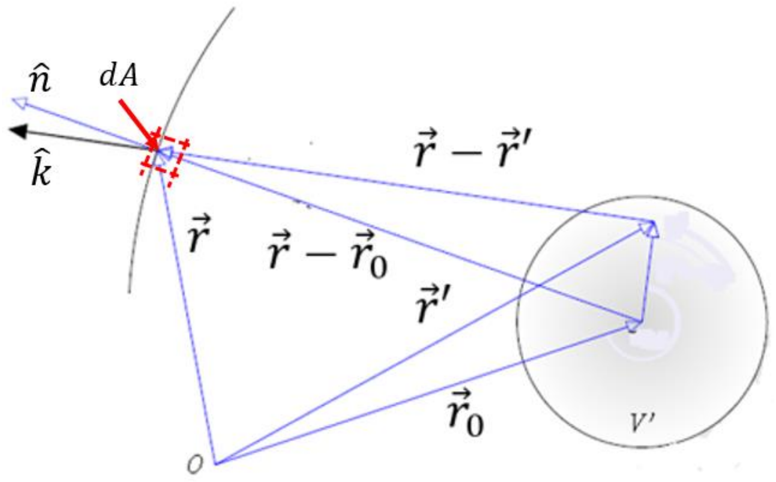
$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\int\left[\vec{j}(\vec{r}',\omega)\times\hat{k}\right]\times\hat{k}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r}_0)}dV'$$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},\omega) = c\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega)\times\hat{k}$$

Observação

Como indicado na figura, a grandes distâncias, $\hat{k}\approx\hat{n}$, a normal a uma superfície centrada em $\vec{r}_0$. O elemento de área dessa superfície é

$$d\vec{A} = |\vec{r}-\vec{r}_0|^2 d\Omega\hat{n};\;\; d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi \;\rightarrow\; \frac{\hat{k}\cdot d\vec{A}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\approx d\Omega$$



Potência radiada

$$|\vec{r}-\vec{r}_0| \gg |\vec{r}'-\vec{r}_0| \implies \int \vec{S}\cdot d\vec{A} \to const$$

Dois casos a serem considerados: campos monocromáticos e campo com largura de banda finita.

Campos monocromáticos: $\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{E}^*_\omega(\vec{r})e^{i\omega t}\right]$

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\mu_0}\left[\vec{E}_\omega \times \vec{B}^*_\omega + \vec{E}^*_\omega \times \vec{B}_\omega + \vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega e^{2i\omega t} + \vec{E}^*_\omega \times \vec{B}^*_\omega e^{-2i\omega t}\right]$$

Fazendo a média temporal sobre um período, os dois últimos termos se cancelam e

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re\left[\vec{E}_\omega(\vec{r}) \times \vec{B}^*_\omega(\vec{r})\right]$$

Na região distante, temos

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re\left[\left(c\vec{B}_\omega \times \hat{k}\right) \times \vec{B}^*_\omega\right] = \frac{c}{2\mu_0} Re\left[\left(\vec{B}^*_\omega \cdot \vec{B}_\omega\right)\hat{k} - \left(\vec{B}^*_\omega \cdot \hat{k}\right)\vec{B}_\omega\right]$$

Transformada do campo magnético de radiação:

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\int\left[\vec{J}(\vec{r}\,',\omega)\times\hat{k}\right]e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}dV'$$

$$\therefore\ \vec{B}^*_{rad}(\vec{r},\omega)\cdot\hat{k} = 0\ \rightarrow \left\langle\vec{S}(\vec{r})\right\rangle = \frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}_{rad}(\vec{r},\omega)\right|^2\hat{k}$$

No cálculo de $\left\langle\vec{S}(\vec{r})\right\rangle$, o produto das constantes à frente das integrais fica

$$\frac{c}{2\mu_0}\frac{\omega^2}{16\pi^2\epsilon_0^2c^6} = \frac{1}{32\pi^2}k^2R_0;\ \ k = \frac{\omega}{c};\, c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\quad R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376{,}7\Omega$$

A constante R_0 é denominada *Impedância Intrínseca do Vácuo* e corresponde à relação $\left|\vec{E}\right|/\left|\vec{H}\right|$ em uma onda eletromagnética se propagando no vácuo. Assim,

$$\left\langle\vec{S}(\vec{r})\right\rangle = \frac{1}{32\pi^2}k^2R_0\left|\int\left[\vec{J}(\vec{r}\,',\omega)\times\hat{k}\right]e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}dV'\right|^2\frac{\hat{k}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$$

Potência através de um elemento de área $d\vec{A}$

$$dP = \left\langle \vec{S}(\vec{r}) \right\rangle \cdot d\vec{A} \;\propto\; \frac{\hat{k} \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cong d\Omega$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} R_0 \left| \int \left[\vec{j}(\vec{r}\,', \omega) \times \vec{k} \right] e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)} dV' \right|^2}$$

(Panofsky & Phillips - 14.53; Thidé – 6.5)

- Como $dP/d\Omega$ independe de $|\vec{r} - \vec{r}_0|$, a potência radiada por unidade de ângulo sólido é constante até o infinito.
- A expressão acima, além de fornecer a intensidade da potência transmitida, permite também determinar sua distribuição angular, como veremos na aplicação para uma antena dipolar.