MODELO DE APREÇAMENTO DE ATIVOS DE CAPITAL (CAPM)

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

Bodie et. al. (2014), cap. 9

Modelo de Precificação de Ativos de Capital (CAPM)

O CAPM (Capital Asset Pricing Model) fornece uma estimativa precisa entre o risco de um ativo e seu retorno esperado

Importância dos resultados do CAPM, embora não totalmente confirmados empiricamente:

1. Fornece um benchmark (bom valor de comparação) para a taxa de retorno esperado dos ativos, dado o risco
2. Cálculo de uma boa estimativa do retorno esperado de ativos que ainda não foram negociados no mercado e, portanto, o preço justo dado pelas relações entre oferta e demanda ainda é desconhecido (exemplo: preço inicial da ação de uma empresa que está em processo de IPO)

O CAPM foi desenvolvido à partir do modelo de seleção de portfolio de Markowitz, em trabalhos publicados 12 anos depois, por Sharpe, Lintner e Mossin.*

Hipótese Central do Modelo: indivíduos são iguais na forma de tomar a decisão de investimento; o que os diferencia é a riqueza inicial e a aversão ao risco

* [1]William Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium," *Journal of Finance*, September 1964.
[2]John Lintner, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, February 1965.
[3]Jan Mossin, "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, October 1966.

Pressupostos do CAPM

1	Há muitos investidores, cada um com uma dotação (riqueza) pequena comprada à dotação inicial do mercado. Mercado de ativos em competição perfeita: investidores são tomadores de preços e suas ações não afetam o preço de mercado
2	Todos os investidores mantém os ativos por um período de tempo (compra e venda ocorre no mesmo período de tempo). Comportamento míope do investidor: ignora tudo o que pode ocorrer após terminado o período de tempo de manutenção do ativo (comportamento sub ótimo)
3	Investimentos são limitados ao universo de ativos publicamente negociados e ao ativo livre de risco. Preço justo do ativo é conhecido por todos (processo de descoberta de preços). Investidores podem tomar ou dar emprestado qualquer montante à taxa de juros livre de risco (taxa fixa)
4	Não há pagamento de imposto sobre ganhos, nem custos de transação para negociar os ativos.
5	Investidores são otimizadores da média-variância: todos usam o modelo de seleção de portfolio de Markowitz para tomada de decisão
6	Todos os investidores analisam os ativos da mesma forma e possuem a mesma visão econômica: mesmas estimativas de distribuição de probabilidades dos retornos esperados (mesma lista de inputs do modelo de FE) ⇨ expectativas homogêneas

Equilíbrio no CAPM

Considerando os pressupostos do modelo, os resultados de equilíbrio são:

1) Todos os investidores escolhem manter ativos de risco na proporção 2 x 1 em relação à proporção desses ativos no portfolio de mercado (M) – o qual inclui todos os ativos negociáveis

2) O portfolio de Mercado (M) e os portfolios ótimos de risco de cada e todo investidor estão sobre a fronteira eficiente

   Linha de Alocação de Capital (CAL): reta entre o ativo livre de risco e o ponto de tangência da FE onde encontra-se o portfolio ótimo de risco (P)

   Linha do Mercado de Capitais (CML): reta entre o ativo livre de risco e o ponto de tangência da FE onde encontra-se o portfolio ótimo de mercado (M)

   Todos os investidores possuem M como portfolio ótimo de risco, diferindo apenas no montante investido em M e no ativo livre de risco

3) O prêmio de risco do portfolio de Mercado é proporcional ao seu risco e ao grau de aversão ao risco do investidor representativo (médio). Matematicamente:

$$E(r_M) - r_f = \bar{A}.\sigma_M^2$$

Em que: σ_M^2 = variância do portfolio de Mercado (risco sistemático dos ativos de risco); $\bar{A}$ = aversão ao risco média dos investidores

Equilíbrio no CAPM

Considerando os pressupostos do modelo, os resultados de equilíbrio são:

4) O prêmio de risco dos ativos individuais é proporcional ao prêmio de risco do portfolio de Mercado (M) e ao coeficiente Beta do ativo relativo ao portfolio de mercado

Formalmente, o Beta do ativo i é calculado como:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

E o prêmio de risco individual é dado por:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i . \left[E(r_M) - r_f\right] = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} . \left[E(r_M) - r_f\right]$$

Vamos nos aprofundar no modelo para entender cada um desses resultados ao longo do material!

Portfolio Eficiente de Mercado (M)

Dado que:

Investidores utilizam o Mod.de Seleção de Markowitz (pres. 5)

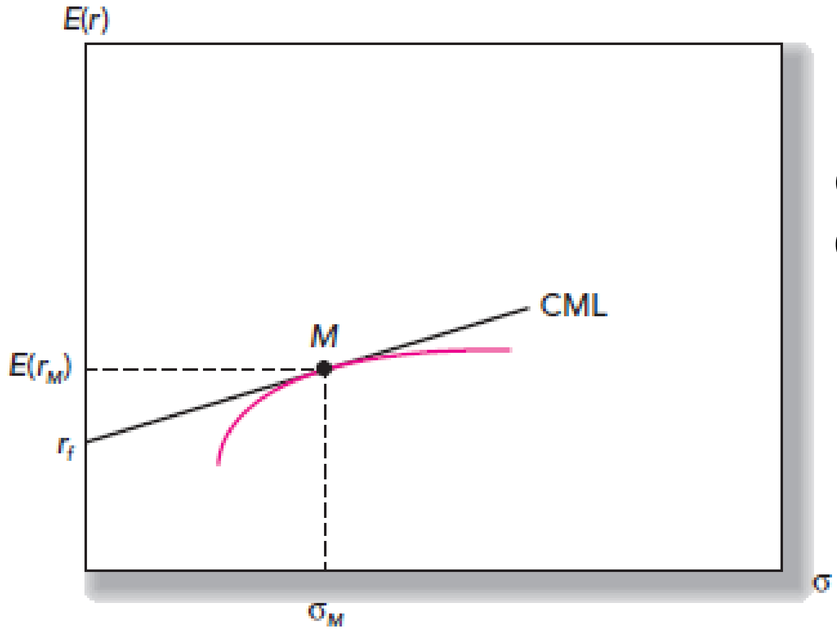
Possuem o mesmo universo de escolha de ativos (pres. 3)

Consideram o mesmo horizonte de tempo (pres. 2)

Utilizam a mesma lista de inputs (pres. 6)

Todos os investidores chegam na mesma composição do portfolio ótimo de risco: carteira identificada pela tangência da reta formada entre o ativo livre de risco e a FE

⇨ Portfolio de Mercado, M: soma dos portfolios de todos os investidores



O portfolio de risco de todos os investidores é simplesmente uma fração do portfolio de mercado (M)

O processo de ajustamento de preço dos ativos garante que todos os ativos disponíveis são incluídos no portfolio de mercado

⇨ Considere que os investidores não queriam comprar um dado ativo; o preço desse ativo começa a cair, até o ponto em que torna interessante pela sua relação risco / retorno esperado ⇨ o ativo é incluído nos portfolios ótimos individuais (passa a ser incluído incluído em M também)

Se todos os investidores possuem um portfolio de risco idêntico, esse portfolio tem que ser M

Questão: qual o preço do ativo que faz com os investidores estejam dispostos a incluí-lo em suas carteiras?

Portfolio Eficiente de Mercado (M)

No Modelo CAPM, M é o portfolio ótimo de tangência da Fronteira Eficiente: linha CML é uma especificação da CAL

A estratégia passiva de investir no portfolio formado pelo índice de mercado é eficiente!

⇨ Vamos separar os investidores em dois investidores representativos: (i) investidor não informado (que não se interessa em análise de mercado e investe na estratégia passiva do portfolio de mercado M); e (ii) investidor informado, que otimiza sua carteira usando o modelo de Seleção de Ativos de Markowitz

⇨ O investidor não informado sabe que se o outro investidor é informado, o portfolio de mercado é ótimo

Se alguns investidores utilizarem a análise de mercado, enquanto outros utilizarem a estratégia passiva M, a CML ainda é a CAL eficiente para o mercado

Esse resultado é chamado de Teorema dos Fundos Mútuos de Investimento:

Dada a Propriedade da Separação (capítulo 07), vamos separar a seleção do portfolio em dois componentes:

1. Problema técnico: criação da carteira ótima de investimentos (fundo mútuo) por gestores profissionais;
2. Problema pessoal: alocação entre o ativo livre de risco e a carteira ótima com risco (depende da aversão ao risco do investidor)

O investidor passivo enxerga o índice de mercado como uma aproximação razoável de um portfolio de risco eficiente

Prêmio de Risco do Portfolio de Mercado (M)

Considere que o investidor individual escolhe a proporção y para alocar no portfolio ótimo M, tal que:

$$y = \frac{E(r_M) - r_f}{A.\sigma_M^2}$$

No modelo CAPM, investimentos no ativo livre de risco são feitos pelos investidores por meio de dar ou tomar emprestado à taxa r_f: valor de empréstimos à taxa livre de risco (posição comprada no ativo livre de risco) deve igual ao valor dos montantes tomados em empréstimos pela mesma taxa (posição vendida no ativo livre de risco)

⇨ Posição agregada investida na taxa livre de risco é igual a zero, logo posição agregada no portfolio de risco é 100% ($\bar{y} = 1$). Substituindo esses resultados na alocação ótima agregada no portfolio de risco M, temos:

$$\bar{y} = \frac{E(r_M) - r_f}{\bar{A}.\sigma_M^2}$$

Portanto, o prêmio de risco do portfolio com risco M é dado por:

$$\boxed{E(r_M) - r_f = \bar{A}.\sigma_M^2}$$

O prêmio de risco do portfolio de mercado M é proporcional a seu risco (variância) e à aversão ao risco média do mercado $\bar{A}$

Retornos Esperados dos Ativos Individuais

O CAPM tem como base o fato de que o prêmio de risco apropriado de um ativo é determinado pela sua contribuição para o risco do portfolio dos investidores como um todo ⇨ o risco do portfolio é o que realmente importa para definir o prêmio de risco demandado de cada ativo

A contribuição de um dado ativo para o risco de um portfolio é dada pela sua covariância com o portfolio de mercado

Seja um portfolio com *n* ativos, a variância do portfolio de mercado é determinada pela matriz de variância e covariância de seus n ativos e seus respectivos pesos:

Portfolio Weights	w_1	w_2	...	w_{GE}	...	w_n
w_1	$Cov(r_1, r_1)$	$Cov(r_1, r_2)$	...	$Cov(r_1, r_{GE})$	...	$Cov(r_1, r_n)$
w_2	$Cov(r_2, r_1)$	$Cov(r_2, r_2)$	...	$Cov(r_2, r_{GE})$	...	$Cov(r_2, r_n)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
w_{GE}	$Cov(r_{GE}, r_1)$	$Cov(r_{GE}, r_2)$	...	$Cov(r_{GE}, r_{GE})$	...	$Cov(r_{GE}, r_n)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
w_n	$Cov(r_n, r_1)$	$Cov(r_n, r_2)$	...	$Cov(r_n, r_{GE})$	...	$Cov(r_n, r_n)$

A contribuição de um ativo para a variância do portfolio é calculada pela soma do todos os termos de covariância da coluna referente ao ativo, onde cada covariância é multiplicada pelos pesos dos dois ativos respectivos

Utilizando a ação da GE como exemplo, a contribuição da GE para a variância do portfolio de mercado é:

$$w_{GE}[w_1 Cov(r_1, r_{GE}) + w_2 Cov(r_2, r_{GE}) + \ldots + w_{GE} Cov(r_{GE}, r_{GE}) + \ldots + w_n Cov(r_n, r_{GE})]$$

Retornos Esperados dos Ativos Individuais

Vamos continuar olhando para o exemplo da GE:

$$\underbrace{w_{GE}[w_1\text{Cov}(r_1, r_{GE}) + w_2\text{Cov}(r_2, r_{GE}) + \ldots + w_{GE}\text{Cov}(r_{GE}, r_{GE}) + \ldots + w_n\text{Cov}(r_n, r_{GE})]}_{\text{Covariância da GE com o portfolio de mercado}}$$

A covariância de um determinado ativo com os demais ativos domina a contribuição do ativo para o risco do portfolio total

Contribuição da GE para o risco do portfolio = $w_{GE}.Cov(r_{GE}, r_M)$, pois:

A taxa de retorno do portfolio de mercado pode ser escrita como: $r_M = \sum_{k=1}^{n} w_k r_k$

Assim, a covariância dos retornos da GE com o portfolio de mercado é: $\text{Cov}(r_{GE}, r_M) = \text{Cov}\left(r_{GE}, \sum_{k=1}^{n} w_k r_k\right) = \sum_{k=1}^{n} w_k \text{Cov}(r_k, r_{GE})$

A contribuição da ação da GE para o prêmio de risco do mercado é: $w_{GE}.\left[E(r_{GE}) - r_f\right]$, assim, a **Taxa de Recompensa pelo Risco** é dada por:

$$\boxed{\frac{Contribuição\ da\ GE\ para\ o\ prêmio\ de\ risco}{Contribuição\ da\ GE\ \ para\ a\ variância} = \frac{w_{GE}.\left[E(r_{GE}) - r_f\right]}{w_{GE}.Cov(r_{GE}, r_M)} = \frac{E(r_{GE}) - r_f}{Cov(r_{GE}, r_M)}}$$

Retornos Esperados dos Ativos Individuais

A taxa de recompensa pelo risco do portfolio de mercado é:

$$\boxed{\frac{Prêmio\ de\ risco\ do\ Mercado}{Variância\ do\ Mercado} = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}}$$

Preço do Risco de Mercado :
Excesso de retorno demandado pelos investidores para aceitar o risco do mercado

No equilíbrio, todos os ativos devem oferecer a mesma taxa de recompensa pelo risco ⇨ preços de mercado são ajustados pela demanda dos ativos até que as taxas se igualem

Assim, as taxas de recompensa pelo risco da GE e do portfolio de mercado devem ser iguais, ou seja:

$$\frac{E(r_{GE}) - r_f}{Cov(r_{GE}, r_M)} = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

O prêmio de risco da ação da GE é, portanto, dado por:

$$E(r_{GE}) - r_f = \frac{Cov(r_{GE}, r_M)}{\sigma_M^2}[E(r_M) - r_f]$$

Sendo, $\beta_{GE} = \frac{Cov(r_{GE}, r_M)}{\sigma_M^2}$ (medida da contribuição do risco da GE para a variância total do portfolio de mercado), podemos escrever o retorno esperado da GE como:

$$\boxed{\boldsymbol{E(r_{GE}) = r_f + \beta_{GE}.\left[E(r_M) - r_f\right]}}$$

Relação Retorno Esperado – Beta

Retornos Esperados dos Ativos Individuais

- ✓ Se todos os investidores possuem portfolios de risco idênticos, então todos os investidores perceberão que o beta de um dado ativo em relação ao portfolio de mercado é igual ao beta do ativo com seu próprio portfolio de risco ⇨ investidores concordam com o prêmio de risco de cada ativo
- ✓ Carteiras bem diversificadas eliminam o risco específico do ativo, restando apenas o risco sistemático ⇨ mesmo que um investidor não detenha exatamente o portfolio de mercado, uma carteira bem diversificada será altamente correlacionada com o mercado, de forma que o beta de um ativo relativo ao mercado ainda será uma excelente medida de risco

Se a Relação Retorno Esperado – Beta é observada para cada ativo individual, então ela é válida para quaisquer combinações de ativos

⇨ Suponha que o ativo *k* tenha peso w_k no portfolio P, em que $k = (1,...,n)$.

⇨ A Relação Retorno Esperado – Beta do portfolio P é dada para soma da Relação Retorno Esperado – Beta de cada ativo, ponderado pelo seu peso, conforme segue:

$$
\begin{aligned}
w_1 E(r_1) &= w_1 r_f + w_1\beta_1[E(r_M) - r_f] \\
+w_2 E(r_2) &= w_2 r_f + w_2\beta_2[E(r_M) - r_f] \\
+ \quad \cdots &= \cdots \\
+w_n E(r_n) &= w_n r_f + w_n\beta_n[E(r_M) - r_f] \\
\hline
E(r_P) &= r_f + \beta_P[E(r_M) - r_f]
\end{aligned}
$$

Em um mercado eficiente, investidores recebem elevados retornos esperados apenas se eles estão dispostos a correr o risco dos ativos

Retornos Esperados dos Ativos Individuais

Exercício:

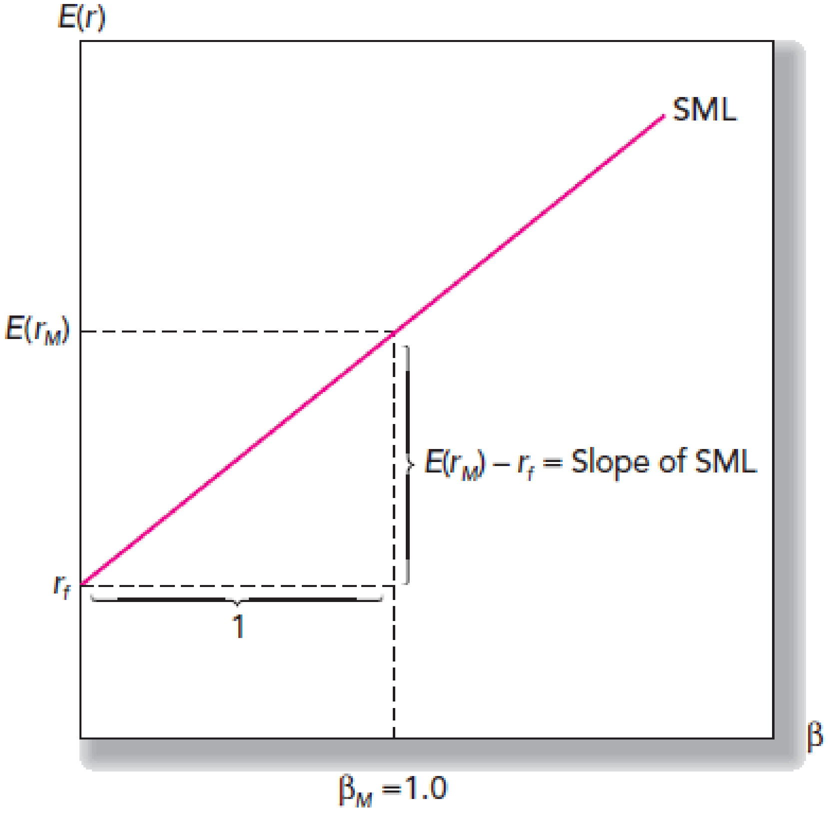
Suponha que o prêmio de risco do portfolio de mercado é estimado em 8%, com um desvio-padrão de 22%. Qual o prêmio de risco de um portfolio investido 25% em GM e 75% em Ford, dado que estes ativos possuem betas de 1,10 e 1,25, respectivamente?

Resposta: $\boldsymbol{\beta_P = 1,2125; E(r_P) = 9,7\%}$

Linha de Mercado do Ativo (SML)

A Linha de Mercado do Ativo (SML – Security Market Line) é a representação gráfica da relação retorno esperado – beta

O beta de um ativo mede sua contribuição para a variância do portfolio de mercado ⇨no modelo CAPM, o prêmio de risco é diretamente proporcional ao beta e ao prêmio de risco do portfolio de mercado



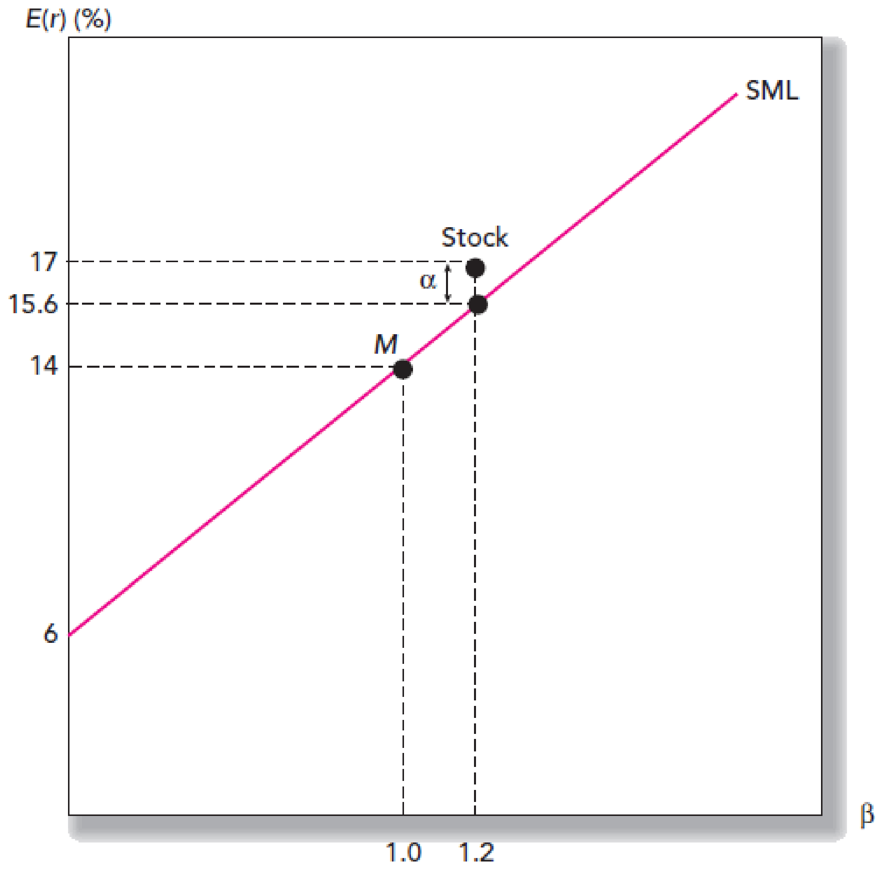
- ✓ SLM é a reta do prêmio de risco de cada ativo (ou de um portfolio de risco) em função de seu risco ⇨ a parcela relevante do risco de cada ativo dentro de um dado portfolio é a contribuição do ativo para a variância do portfolio (dada pelo beta)
- ✓ Dado que o portfolio de mercado tem beta = 1, então: a inclinação da SML é o prêmio de risco do portfolio de mercado

Enquanto a SML é a reta dos ativos ou portfolios de risco, a CML (Linha do Mercado de Capitais) é a reta que relaciona o retorno esperado de portfolios eficientes (portfolios compostos pela carteira de mercado e pelo ativo livre de risco) como função de seu desvio-padrão

Linha de Mercado do Ativo (SML)

A SML fornece um *benchmark* para avaliação da performance de investimentos: a reta fornece a taxa de retorno necessária para compensar investidores pelo risco e pelo valor do dinheiro no tempo

- ⇨ Ativos bem precificados (preço justo) ficam exatamente sobre a SML: igualdade das taxas de recompensa pelo risco na condição de equilíbrio de mercado
- ⇨ SML é utilizada para calcular o retorno efetivamente esperado para um dado nível de risco do ativo



- Se um ativo estiver sub-precificado (taxa de recompensa pelo risco elevada), então esse ativo possui retorno esperado acima do estipulado pela SML: ativos sub-precificados ficam acima da SML
- Ativos sobre-precificados (baixa taxa de recompensa pelo risco) ficam abaixo da SML
- A diferença entre o retorno justo dado pela SML e o retorno do ativo é chamada de Alpha
- Ativos sub-precificados possuem alpha positivo

Dizemos que ativos com alpha positivo são geradores de alpha para o investidor ou para o portfolio

Linha de Mercado do Ativo (SML)

Exercício

A ação ABC tem retorno esperado de 12% e beta = 1; Já a ação XPTO tem retorno esperado de 13% e beta = 1,5. O retorno esperado de mercado é de 11% e o retorno do ativo livre de risco é de 5%. Com base nessas informações, responda:

1) De acordo com o CAPM, qual ação é a melhor compra?
2) Qual o alpha de cada ação? Trace a SML e coloque os pontos de cada ação no gráfico. Mostre os alphas graficamente.

Resposta: $\boldsymbol{\alpha_{ABC} = 1\%; \alpha_{XPTO} = -1\%}$

CAPM e Modelo de Índices

O CAPM faz estimativas sobre os retornos esperados, mas na prática apenas é possível observar os retornos realizados

O Modelo de Índice Único pode ser usado para fazer a ligação entre os retornos esperados pelo CAPM e os retornos observados

Pelo Modelo de Índice Único, escrevemos o excesso de retorno em relação ao ativo livre de risco como:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

Vamos decompor estatisticamente o retorno observado pelo Modelo de Índice Único:

1) Derivar a covariância entre o ativo *i* e o índice de mercado

Por definição, o componente específico ou não-sistemático é independente do excesso de retornos do índice de mercado, ou seja: $Cov(R_M, e_i) = 0$. Dessa maneira, a covariância do excesso de retorno do ativo i com o índice de mercado é:

$$Cov(R_i, R_M) = Cov(\beta_i R_M + e_i, R_M) = \beta_i Cov(R_M, R_M) + Cov(e_i, R_M) = \beta_i \sigma_M^2$$

2) Reescrever o beta do ativo

Dado que $Cov(R_i, R_M) = \beta_i \sigma_M^2$, podemos escrever o beta do ativo i como:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

Mesmo beta do CAPM, exceto pelo fato de que o portfolio de mercado (teórico) do CAPM foi substituído pelo índice de mercado (observável)

CAPM e Modelo de Índices

No CAPM, o excesso de retorno para o ativo i em relação ao portfolio de mercado (teórico) é dado por:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i . \left[E(r_M) - r_f\right]$$

Pela equação do Modelo de Índice Único para cálculo do excesso de retorno, em que M é o índice de mercado (observável) temos que:

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i . \left(r_M - r_f\right) + e_i$$

Ao calcular o valor esperado de ambos, chega-se a:

$$\mathrm{E}(r_i) - r_f = \alpha_i + \beta_i . \left[E(r_M) - r_f\right]$$

CAPM prediz que o alpha esperado deve ser igual a zero, considerando a situação de equilíbrio

Modelo de Índice Único prediz que o valor realizado do alpha deve ser, em média, zero para uma amostra de retornos históricos observados

- ✓ O CAPM utiliza retornos esperados, de forma que o alpha pode ser positivo ou negativo em relação ao retorno observado, não sendo possível prever o desempenho do ativo de antemão
- ✓ Importante: a amostra de alpha não é previsível, ou seja, os valores de alpha são independentes de um período em relação a outro

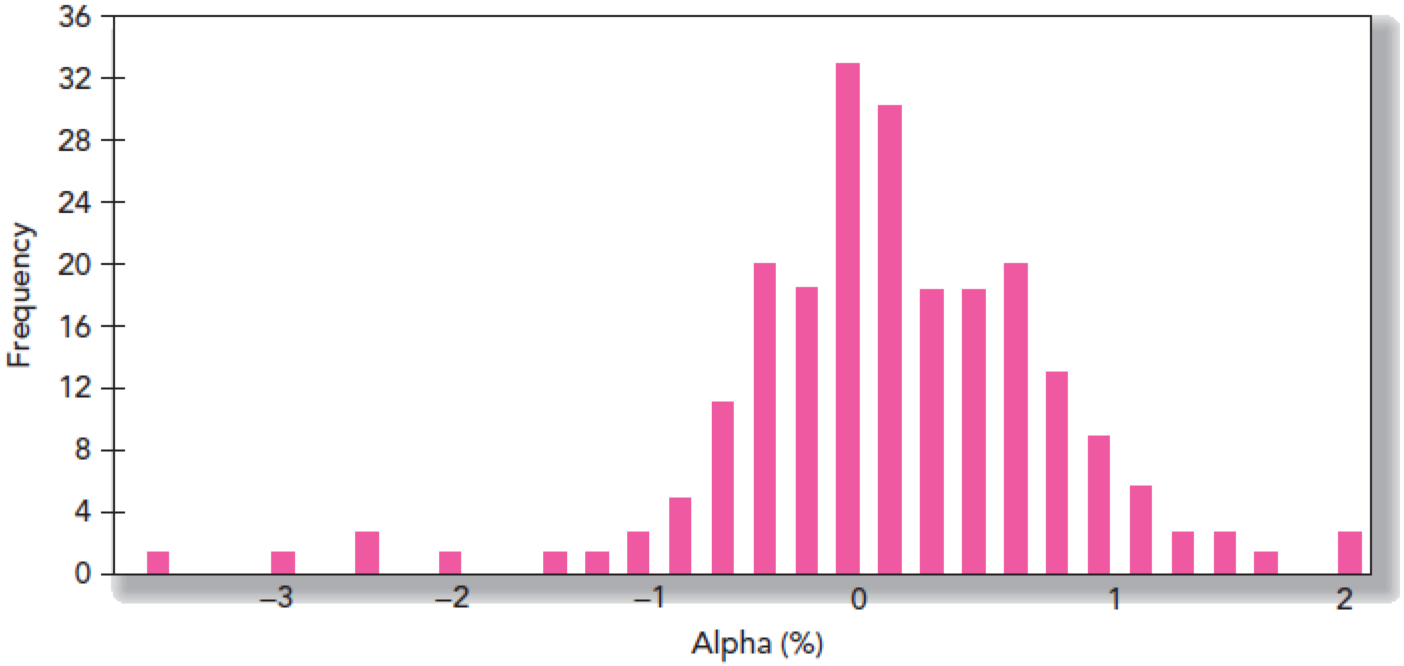
CAPM e Modelo de Índices

Malkiel (1995) estimou os valores de alpha para uma grande amostra de fundos mútuos de investimento

Os resultados mostraram que (gráfico abaixo):

✓ A distribuição dos valores de alpha tem formato parecido com uma Normal, com média negativa, mas estatisticamente não diferente de zero

✓ Na média, os fundos de investimento não parecem ter rentabilidade acima do índice de mercado (S&P500) quando a medida é ajustada pelo risco



Source: Burton G. Malkiel, "Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971–1991," *Journal of Finance* 50 (June 1995), pp. 549–72. Reprinted by permission of the publisher, Blackwell Publishing, Inc.

- O estudo incluiu todos os fundos de investimento dos últimos 10 anos prévios à data da pesquisa
- O alpha estimado tem um viés de alta uma vez que os fundos que faliram ou foram extintos no período foram retirados da amostra e omitidos da cauda esquerda da distribuição (viés de sobrevivência)
- O baixo impacto dos fundos com alpha positivo na distribuição sugere a dificuldade em ter um desempenho acima da estratégia passiva, que o CAPM afirma ser ótima

CAPM: Algumas Considerações

Como o CAPM afeta as decisões de investimento?

Considerando que o CAPM é um bom modelo para alocação de ativos (e que prediz que o alpha esperado é nulo na condição de equilíbrio), investidores dispostos a construir carteiras com alpha positivo devem:

(i) Identificar um índice de mercado para utilizar;

(ii) Empregar análise macroeconômica para obter boas previsões para o índice de mercado e análise de ativos para identificar os ativos mal precificados.

Se os alphas fossem identicamente zero, não haveria incentivos para as análises de ativos, entretanto, o equilíbrio de mercado é caracterizado por preços de ativos cujos valores oscilam próximos a seus preços justos – em que os alphas são praticamente nulos – mas há desvios suficientes para induzir a análise de ativos

Observações sobre estimativas econométricas do modelo

Há alguns problemas nas estimativas do modelo:

(i) Resíduos dos ativos podem ser correlacionados (especialmente para ativos de mesmo setor): estimativa dos betas é não é eficiente ⇨ deve-se substituir MQO (Mínimos Quadrados Ordinários) por outro tipo de regressão, como MQG (Mínimos Quadrados Generalizados)

(ii) Alpha, beta e resíduos se alteram com o tempo: pode levar à falsa rejeição das estimativas ⇨ Modelos ARCH (heteroscedasticidade condicional autoregressiva) corrigem este problema

(iii) Betas podem não variar de forma aleatória ao longo do tempo ⇨ considerar o uso do CAPM condicional, que permite a mudança do risco e do retorno dos ativos condicional a um conjunto de variáveis

Extensões do CAPM

Portfolio Zero-Beta

Os portfolios da Fronteira Eficiente possuem características interessantes, conforme descritas por Merton (1972)*:

1. Um portfolio formado pela combinação de dois outros portfolios da FE também está na FE;

2. O retorno esperado de qualquer ativo pode ser escrito como uma função linear do retorno esperado de quaisquer dois portfolios da FE. Assim, sejam os portfolios eficientes P e Q, podemos escrever o retorno esperado do ativo i como:

$$E(r_i) - E(r_Q) = [E(r_P) - E(r_Q)]\frac{\text{Cov}(r_i, r_P) - \text{Cov}(r_P, r_Q)}{\sigma_P^2 - \text{Cov}(r_P, r_Q)}$$

3. Todo portfolio da FE, exceto o portfolio de mínima variância global, tem um portfolio par na metade debaixo da FE (ineficiente), com o qual é não correlacionado. O portfolio par ineficiente, por ser não correlacionado com o portfolio eficiente, é chamado de Portfolio Zero-Beta.

[20]Robert C. Merton, "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 1972. Roll, see footnote 14.

Extensões do CAPM

Portfolio Zero-Beta

Se escolhermos o portfolio eficiente de mercado M e seu par Zero-Beta, então a equação anterior é dada por:

$$E(r_i) - E(r_Z) = [E(R_M) - E(R_Z)]\frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \beta_i[E(r_M) - E(r_Z)]$$

Essa equação assemelha-se à SML do CAPM, exceto pela substituição do retorno do ativo livre de risco pelo retorno do portfolio zero-beta do portfolio de mercado

- ✓ Black (1972)* mostrou que quando os investidores tem restrições para tomar / dar emprestado à taxa livre de risco, a equação acima pode ser usada como equivalente ao CAPM. Nessa situação, alguns investidores escolhem portfolios da FE que não são necessariamente o portfolio eficiente de mercado
- ✓ Como as taxas médias de retorno do portfolio zero-beta são maiores do que dos títulos públicos (livre de risco), o modelo zero-beta pode explicar o motivo que: (i) estimativas médias dos valores de alpha são positivas para ativos com baixos valores de beta; e (ii) estimativas médias dos valores de alpha são negativas para ativos com elevados valores de beta

[21]Fischer Black, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," *Journal of Business*, July 1972.

Extensões do CAPM

Modelo Multi-Período e Hedge de Portfolios

Em um modelo multi-período, indivíduos otimizam o consumo / plano de investimento por toda a vida e adaptam suas decisões de consumo / investimento para condições de riqueza e aposentadoria

- ✓ Quando a incerteza sobre os retornos do portfolios é a única fonte de incerteza e as oportunidades de investimento se mantém inalteradas durante o tempo de vida (não há mudança na distribuição dos retornos dos ativos de risco) Merton* mostrou que a relação retorno esperado – beta se mantém a mesma do modelo de único período (Modelo ICAPM – Intertemporal CAPM)
- ✓ Mas, quando outras fontes de risco são adicionadas (como taxa livre de risco futuras, retornos esperados, risco do portfolio de mercado etc), os resultados se alteram

Suponha que existam K fontes de risco e K portfolios de hedge. Então, o ICAPM resulta na SML para multi-período da forma:

$$E(R_i) = \beta_{iM} E(R_M) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} E(R_k)$$

Em que: β_{iM} = beta do ativo i em relação ao portfolio de mercado M; β_{iK} = beta do ativo i em relação ao K-ésimo portfolio de hedge;

[24]Merton's classic works are collected in *Continuous-Time Finance* (Oxford, U.K.: Basil Blackwell, 1992).

Liquidez e o CAPM

Expectativas heterogêneas: crenças sobre retornos esperados não são iguais em todo o mercado

A existência de expectativas heterogêneas (informações privadas sobre ativos) motivam os negócios, uma vez que os investidores buscam lucros com mudanças em suas carteiras, de acordo com suas demandas

A existência da negociação de ativos e os custos de transação possuem elevada relevância para os investidores

Liquidez: facilidade e rapidez com que um ativo pode ser vendido a seu preço justo de mercado, podendo ser analisada em relação a 3 fatores bastante relacionados:

1. Custo de transação: diferença entre ofertas de compra (*bid*) e ofertas de venda (*ask*), chamado de *spread bid-ask* ⇨ ativos líquidos tem *spread bid-ask* próximo a zero
2. Impacto de preço: desconto no preço para que sejam negociados grandes volumes do ativo ⇨ ativos com liquidez são vendidos ao preço justo de mercado, com desconto muito próximo a zero para negociação de grandes volumes
3. Velocidade: habilidade de vender o ativo rapidamente sem incorrer em grandes descontos (desconto de iliquidez) ⇨ um ativo líquido é aquele em que não há desconto de iliquidez

Investidores exigem compensação pelo risco de liquidez ⇨ há um componente sistemático do risco de liquidez que afeta a taxa de retorno de equilíbrio e, consequentemente, a relação retorno esperado - beta

Liquidez e o CAPM

Acharyz e Pedersen (2005)* incluíram a liquidez no CAPM por meio de três componentes do risco de liquidez que capturam o quanto a liquidez varia sistematicamente com outras condições de mercado: **betas de liquidez**, dados por:

(i) Variação da iliquidez dos ativos em relação à iliquidez do mercado;

(ii) Variação dos retornos dos ativos com a iliquidez do mercado; e

(iii) Variação da iliquidez dos ativos com o retorno do mercado.

Assim, o retorno esperado depende da liquidez esperada, juntamente com o modelo CAPM tradicional:

$$E(R_i) = kE(C_i) + \lambda(\beta + \beta_{L1} - \beta_{L2} - \beta_{L3})$$

Em que: $E(C_i)$ = custo esperado da iliquidez; k = ajuste para o período de detenção médio de todos os ativos; λ = prêmio de risco médio de mercado do custo de iliquidez do mercado, $E(R_M - C_M)$; β = medida do risco sistemático do mercado; $\beta_{L1},\ \beta_{L2},\ \beta_{L3}$ = betas de liquidez

A relação retorno esperado – beta agora possui um componente específico do ativo estimado que mostra o efeito da liquidez do ativo; este efeito é similar ao alpha no Modelo de Índice Único convencional

[33] V. V. Acharya and L. H. Pedersen, "Asset Pricing with Liquidity Risk," *Journal of Financial Economics* 77 (2005).

Liquidez e o CAPM

O risco total de cada ativo incorpora 3 elementos do risco de liquidez, que são:

$$\beta_{L1} = \frac{\mathrm{Cov}(C_i, C_M)}{\mathrm{Var}(R_M - C_M)}$$

Medida de sensibilidade da iliquidez do ativo à iliquidez do mercado: investidores demandam compensação adicional para manter um ativo que se torna ilíquido quando a condição geral de liquidez é baixa

$$\beta_{L2} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, C_M)}{\mathrm{Var}(R_M - C_M)}$$

Medida de sensibilidade do retorno do ativo à iliquidez do mercado. Esse coeficiente possui sinal negativo, indicando que investidores estão dispostos a aceitar taxa média de retorno menor por ativos que fornecem maiores retornos quando a iliquidez de mercado é maior

$$\beta_{L3} = \frac{\mathrm{Cov}(C_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M - C_M)}$$

Medida de sensibilidade da iliquidez do ativo em relação ao retorno do mercado. Esse coeficiente possui sinal negativo, o que indica que os investidores estão dispostos a aceitar retornos médios menores em ativos que podem ser vendidos mais facilmente (menores custos de iliquidez) quando os retornos de mercado caem

Há muitas variantes de modelos CAPM que incorporam medidas de liquidez. Fato é que os modelos possuem maior poder preditivo com os coeficientes de liquidez do que o modelo CAPM convencional, sendo uma característica importante a ser considerada

[33] V. V. Acharya and L. H. Pedersen, "Asset Pricing with Liquidity Risk," *Journal of Financial Economics* 77 (2005).