UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0530
PROBLEMAS DE ENGENHARIA MECATRÔNICA II

Revisão de Conceitos Iniciais
MATLAB

Objetivos

Objetivo principal desta aula é realizar uma revisão da primeira aula com o MATLAB para fins de continuidade da disciplina

Bibliografia:

1 https://www.mathworks.com

2 Notas de aula

Principais Características

MATLAB

- Programação simplificada e eficiente em alto nível, possuindo uma interface interativa, fácil de usar propiciando rapidez no desenvolvimento de programas
- Computação vetorizada: MATLAB = MATRIZES E VETORES
- Funções implícitas através de linhas de comando
- Menus de ajuda tanto na instalação quanto online
- Excelente capacidade gráfica
- Ferramentas como SIMULINK
- Muitos toolboxes

Revisão de Conceitos

Operações Elementares

Operação	Símbolo	Exêmplo
Adição	+	5 + 3 = 8
Subtração	-	5 – 3 = 2
Multiplicação	*	5 * 3 = 15
Divisão à Direita	/	8/4 = 2
Divisão à Esquerda	\	8\4 = 4/8 = 1/2
Exponenciação	^	5 ^ 2 = 52 = 25

Formatos de Display

Comando	Descrição	Exêmplo
format short	Ponto fixo 4 dígitos decimais	>> 352/9 ans = 39.1111
format long	Ponto fixo 14 dígitos decimais	>> 352/9 ans = 39.11111111111114
format short e	Notação científica 4 dígitos decimais	>> 352/9 ans = 3.9111e+01
format long e	Notação científica 15 dígitos decimais	>> 352/9 ans = 3.911111111111111e+01
format bank	Dois dígitos decimais	>> 352/9 ans = 39.11

Funções Intrínsicas

Função	Descrição
abs(x)	Valor absoluto de x
sqrt(x)	Raiz quadrada de x
sign(x)	Retorna -1 se x<0 , 0 se x = 0 e 1 se x>0
rem(x,y)	Retorna o resto da divisão x/y
exp(x)	Calcula e^x
log(x)	Calcula o logarítmo de x na base e
log10(x)	Calcula o logarítmo de x na base 10
round(x)	Arredonda x ao inteiro mais próximo
fix(x)	Arredonda (ou trunca) x ao inteiro mais próximo de 0
floor(x)	Arredonda x ao inteiro mais próximo a -∞
ceil(x)	Arredonda x ao inteiro mais próximo a + ∞

Cont. …

Função	Descrição
sin(x)	Calcula o seno de x (x em radianos !)
cos(x)	Calcula o cosseno de x
tan(x)	Calcula a tangente de x
asin(x)	Calcula o arco-seno de x (x entre -1 e 1)
acos(x)	Calcula o arco-cosseno de x (em radianos)
atan(x)	Calcula o arco-tangente de x
sinh(x)	Calcula o seno hiperbólico de x
cosh(x)	Calcula o cosseno hiperbólico de x

Funções e Operações com Números Complexos

Função	Descrição
conj(x)	Calcula o complexo conjugado de $x = a + ib$
angle(x)	Calcula o ângulo de fase (radianos) de $x = a + ib$
real(x)	Calcula a parte real de $x = a + ib$
imag(x)	Calcula a parte imaginária de $x = a + ib$
abs(x)	Calcula o valor absoluto (módulo) de $x = a + ib$

Operação	Resultado $c_1 = a_1 + ib_1$ $c_2 = a_2 + ib_2$
$c_1 + c_2$	$(a_1 + a_2) + i(b_1+b_2)$
$c_1 - c_2$	$(a_1 - a_2) + i(b_1-b_2)$
$c_1 \cdot c_2$	$(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 - a_2b_1)$
$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 - b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2}$
$\lvert c_1 \rvert$	$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
c_1^*	$a_1 - ib_1$

Comandos Úteis para o Workspace

Função	Descrição
clear (clear all)	Remove todas as variáveis da memória
clear x, y, z	Remove apenas as variáveis x, y e z da memória
who	Lista as variáveis correntes do workspace
whos	Lista as variáveis e seus tamanhos e classes
what	Lista arquivos .m, .mat e .mex do diretório de trabalho
clc	Limpa a janela de comando (histórico é perdido !)

Definição de Vetores e Matrizes

O segredo para programação eficiente no MATLAB é o uso de operaçoes de VETORIZAÇÃO

```
>> x = [0 1 2 3 4 5]              % vetor linha
x =
     0     1     2     3     4     5

>> x = 0:5                        % vetor linha
x =
     0     1     2     3     4     5

>> x = [0 1 2 3 4 5]'             % vetor coluna, (0:5)'
x =
     0
     1
     2
     3
     4
     5
```

o operador apóstrofo, ‘ , ou transposto transforma vetores linha em coluna e vice versa

detalhe: ‘ é o transposto conjugado,

use, .’ , para transposição sem conjugação

Cont. ...

```
>> z = [i; 1+2i; 1-i]       % vetor coluna
z =
        0 + 1.0000i
   1.0000 + 2.0000i
   1.0000 - 1.0000i

>> z.'                  % transposto sem conjugação
ans =
        0 + 1.0000i   1.0000 + 2.0000i   1.0000 - 1.0000i

>> z'                   % transposto com conjugação
ans =
        0 - 1.0000i   1.0000 - 2.0000i   1.0000 + 1.0000i

>> (z.')'               % mesmo que (z').' , ou, conj(z)
ans =
        0 - 1.0000i
   1.0000 - 2.0000i
   1.0000 + 1.0000i
```

Operações com Matrizes

Convenção: letras minúsculas para vetores e maísculas para matrizes

Comando	**Descrição**
A(:,*n*)	Elementos de todas as linhas da matriz A
A(*n*,:)	Elementos de todas as colunas da matriz A
A(:,*m*,*n*)	Elementos de todas as linhas entre colunas m e n
A(*m*:*n*,:)	Elementos de todas as colunas entre linhas m e n
A(*m*:*n*,*p*:*q*)	Lista as variáveis e seus tamanhos e classes

Comando	**Descrição**
length(v)	Número de elementos em v
size(A)	Ordem da matriz A (retorna um vetor linha [m,n])
reshape(A,m.n)	Rearranja A(m,n) em A(r,s) (rxs = mxn)
diag(v)	Cria uma matriz diagonal com elementos de v
diag(A)	Cria um vetor com elementos da diagonal de A

Cont. …

Comando	Descrição
mean(v)	Valor médio dos elementos de v
min(v)	Valor mínimo de v
sum(v)	Soma dos elementos de v
sort(v)	Ordena elementos de v em ordem crescente
dot(a,b)	Calcula o produto escalar entre a e b
cross(a,b)	Calcula o produto vetorial entre a e b
inv(A)	Calcula a inversa de A
linspace(a,b,N)	Vetor iniciando em a terminando em b com N elementos

Solução de Sistema Linear de Equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$[A]\{x\} = \{b\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

MATLAB

```
>> x = A\b

>> x = inv(A)*b
>> x = A^(-1)*b
```

Autovalores e Autovetores

Da Álgebra Linear:

Um escalar λ é denominado *autovalor* de uma matriz $[A]$ (nxn) se existir um vetor *não nulo* $\{x\}$ tal que

$$\boxed{[A]\{x\} = \lambda\{x\}}$$

Problema Padrão

e, o vetor $\{x\}$ é denominado *autovetor* correspondente ao autovalor λ.

De forma análoga temos o problema de autovalores e autovetores generalizado

$$\boxed{[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}}$$

onde $[B]$ é uma matriz quadrada de ordem n.

Cont. ...

No MATLAB, autovalores e autovetores são calculados através dos comandos:

[V,D] = eig(A,B)

```
>> A = [1 3 ; -2 9]

A =
     1     3
    -2     9
>> B = [-5 2 ; 8 0]
B =
    -5     2
     8     0
>> [V,D] = eig(A,B)
```

```
V =
    1.0000    0.2483
    0.0276    1.0000
```

```
D =

   -0.2190         0
         0    4.2815
```

[V,D] = eig(A)

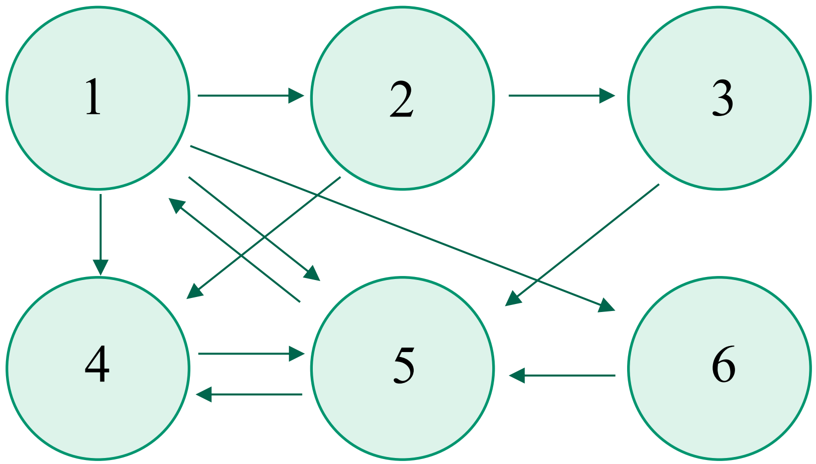
```
>> C = inv(B)*A

C =
   -0.2500    1.1250
   -0.1250    4.3125

>> [V,D] = eig(C)
```

```
V =
   -0.9996   -0.2409
   -0.0276   -0.9705
```

```
D =

   -0.2190         0
         0    4.2815
```

Exêmplo 1 – Ranqueamento de Páginas na Web

Objetivo: aumentar a eficiência de buscadores de páginas na internet



Internet com 6 páginas

- Autor da página 1 entende que as páginas 2, 4, 5 e 6 possuem ligação
- Autor da página 2 entende que sua página conecta com a 3 e 4

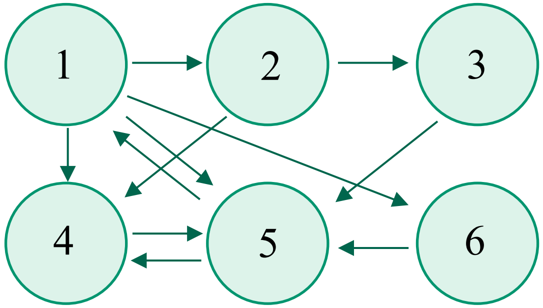
Objetivo principal: Encontrar a página mais importante para uma dada busca

Importância: Número de acessos (setas indicando a página !)

Exêmplo 1 – Cont. ...

Montamos inicialmente uma matriz de ligações [A]

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
[A] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



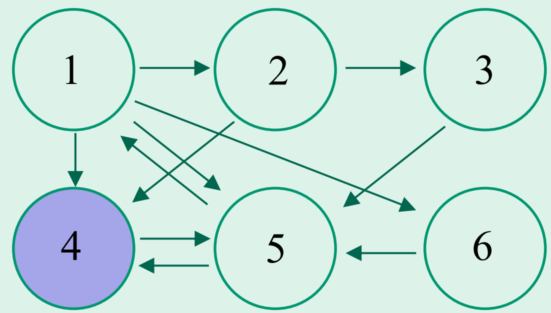
Em seguida calculamos os autovalores e autovetores de [A]. Algebricamente

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$$

Exêmplo 1 – Cont. ...

No Matlab

```
>> [A] = [0 0 0 0 1/2 0 ; 1/4 0 0 0 0 0 ; 0 1/2 0 0 0 0 ; 1/4 1/2 0 0 1/2 0 ; 1/4 0 1 1 0 1; 1/4 0 0 0 0 0 ]

A =

        0         0         0         0    0.5000         0
   0.2500         0         0         0         0         0
        0    0.5000         0         0         0         0
   0.2500    0.5000         0         0    0.5000         0
   0.2500         0    1.0000    1.0000         0    1.0000
   0.2500         0         0         0         0         0

>> [x,lambda] = eig(A)

x =

    0.3771 + 0.0000i   0.5770 + 0.0000i   0.5770 + 0.0000i  -0.4895 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
    0.0943 + 0.0000i  -0.1163 - 0.3262i  -0.1163 + 0.3262i   0.1699 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
    0.0471 + 0.0000i  -0.3220 + 0.2629i  -0.3220 - 0.2629i  -0.1179 + 0.0000i  -0.7044 + 0.0000i  -0.7044 + 0.0000i
    0.5185 + 0.0000i   0.1388 - 0.0633i   0.1388 + 0.0633i  -0.4375 + 0.0000i   0.6570 - 0.1870i   0.6570 + 0.1870i
4   0.7542 + 0.0000i  -0.1614 + 0.4529i  -0.1614 - 0.4529i   0.7052 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
    0.0943 + 0.0000i  -0.1163 - 0.3262i  -0.1163 + 0.3262i   0.1699 + 0.0000i   0.0474 + 0.1870i   0.0474 - 0.1870i

lambda =

    1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i  -0.1398 + 0.3924i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.1398 - 0.3924i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.7203 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
```



Exêmplo 2 – Vibrações Estruturais

Um problema de vibração estrutural livre e conservativo:

vetor de deslocamentos

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

matriz de massa

matriz de rigidez

$$[[K] - \lambda[M]]\{\phi\} = 0$$

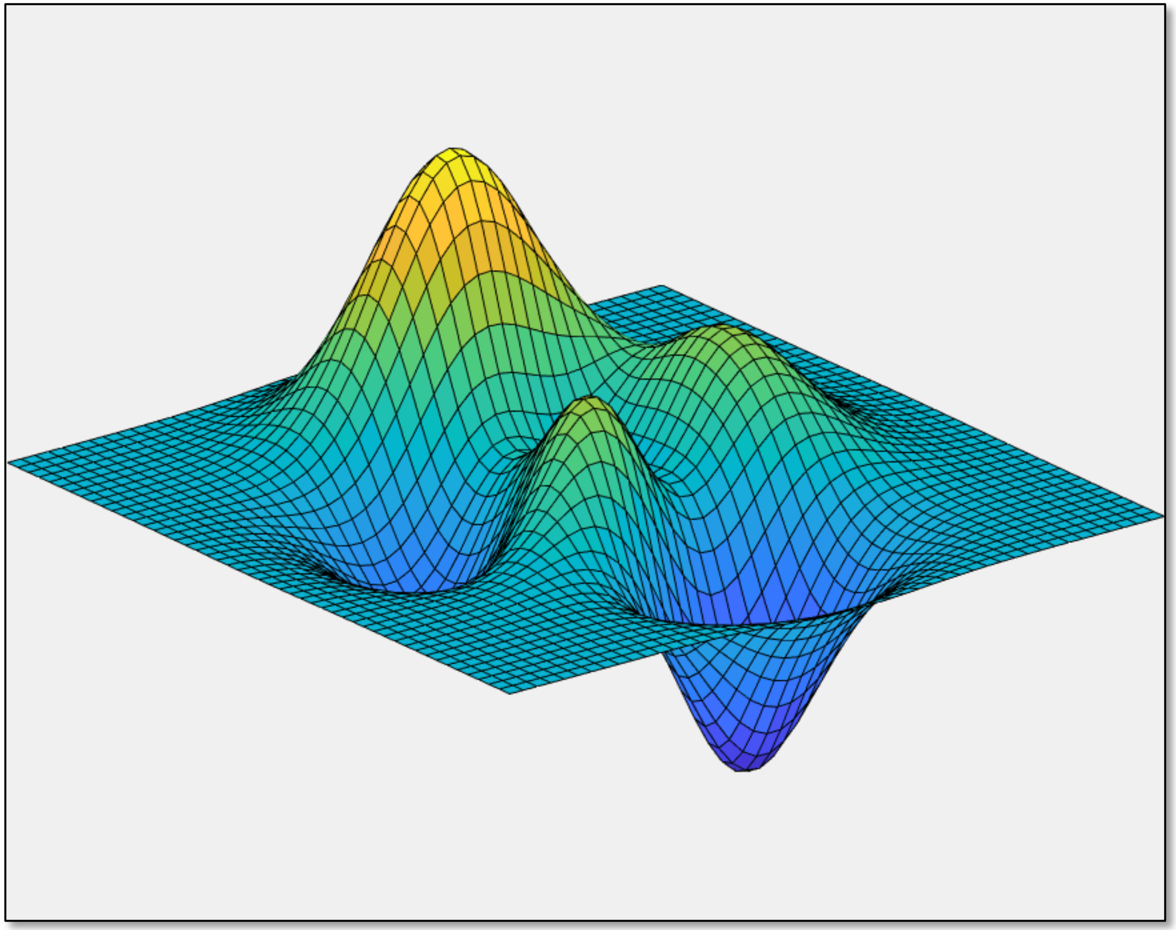
$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

[V,D] = eig(K,M)

[V,D] = eig(E) $[E] = [M]^{-1}[K]$

Exêmplo 2 – Vibrações Estruturais



FIM

Bom Estudo !