Determinantes

Definição:

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e seja M_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A eliminando-se a linha e a coluna contendo a_{ij}. O determinante de M_{ij} é chamado de <u>menor</u> de a_{ij}. Definimos o <u>cofator</u> A_{ij} de a_{ij} por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz 3 x 3

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(M_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(M_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(M_{13})$$

$$\det(A) = (-1)^2 a_{11} \det(M_{11}) + (-1)^3 a_{12} \det(M_{12}) + (-1)^4 a_{13} \det(M_{13})$$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Propriedades do Produto Vetorial

I) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \vec{k} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \vec{i}$$

$$= (x_1 y_1 - y_1 x_1) \vec{k} - (x_1 z_1 - x_1 z_1) \vec{j} + (y_1 z_1 - y_1 z_1) \vec{i}$$

$$= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}}$$

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (y_2z_1 - z_2y_1)\vec{i} - (x_2z_1 - z_2x_1)\vec{j} + (x_2y_1 - y_2x_1)\vec{k}$$

$$-\vec{v} \times \vec{u} = (-y_2z_1 + y_1z_2)\vec{i} - (-x_2z_1 + z_2x_1)\vec{j} + (-x_2y_1 + y_2x_1)\vec{k}$$

$$\therefore \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}}$$

III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{j} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) = (x_2 + x_3)\vec{i} + (y_2 + y_3)\vec{j} + (z_2 + z_3)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2+y_3 & z_2+z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2+x_3 & z_2+z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left[y_1 (z_2+z_3) - z_1 (y_2+y_3) \right] \vec{i} - \left[x_1 (z_2+z_3) - z_1 (x_2+x_3) \right] \vec{j} +$$

$$+ \left[x_1 (y_2+y_3) - y_1 (x_2+x_3) \right] \vec{k}$$

$$= (y_1 z_2 + y_1 z_3 - z_1 y_2 - z_1 y_3) \vec{i} +$$

$$- (x_1 z_2 + x_1 z_3 - z_1 x_2 - z_1 x_3) \vec{j} +$$

$$(x_1 y_2 + x_1 y_3 - y_1 x_2 - y_1 x_3) \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} +$$

$$(y_1 z_3 - z_1 y_3) \vec{i} - (x_1 z_3 - z_1 x_3) \vec{j} + (x_1 y_3 - y_1 x_3) \vec{k}$$

IV) $(m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (m\vec{v})$

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$m\vec{u} = m x_1\vec{i} + y_1 m\vec{j} + m z_1\vec{k}$

$$(m\vec{u}) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m x_1 & m y_1 & m z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = m(y_1 z_2 - z_1 z_2)\vec{i} - m(x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + m(x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

$$= m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore \quad \underline{(m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v})}$

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

a) $\vec{u} = (0,0,0)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

b) Se $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$, então:

$\vec{u} = m\vec{v}$

$\vec{u} = m x_2\vec{i} + m y_2\vec{j} + m z_2\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m x_2 & m y_2 & m z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (m y_2 z_2 - m z_2 y_2)\vec{i} - (m x_2 z_2 - m z_2 x_2)\vec{j} + (m x_2 y_2 - m y_2 x_2)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

VI) $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

- Condição de ortogonalidade entre dois vetores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot [(y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}]$$

$$\underbrace{(x_1 y_1 z_2 - x_1 z_1 y_2) - (y_1 x_1 z_2 - y_1 z_1 x_2) + (z_1 x_1 y_2 - z_1 y_1 x_2)}_{=0}$$

De forma análoga se tem:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

VII) Sentido do vetor resultante.

VIII) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ deixar a cargo do aluno

IX) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

vindo da propriedade VIII

Identidade de Lagrange

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| . \cos\theta)^2$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 . (1 - \cos^2\theta)$$

identidade

$1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 . \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\therefore \boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta}$$

c.q.d.

X) O produto vetorial não é associativo.

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$$

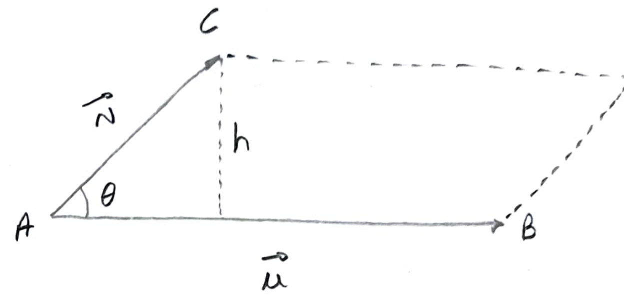
deixar a cargo do aluno.

Interpretação geométrica do produto vetorial

Área $ABCD = \|\vec{u}\| \cdot h$

$\rightarrow h = \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

Área $ABCD = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$



→ Pela propriedade IX, tem-se:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \boxed{\text{Área } ABCD = \|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Exemplos:

Ex 1: Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores:

$$\begin{cases} \vec{u} = (2, -6, 3) \\ \vec{v} = (4, 3, 1) \end{cases}$$

A propriedade VI do produto vetorial afirma que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-6-9)\vec{i} - (2-12)\vec{j} + (6+24)\vec{k}$$

$$= \underline{-15\vec{i} + 10\vec{j} + 30\vec{k}} \;\; \text{R.}$$

de forma análoga temos: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

$$\therefore \vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \underline{15\vec{i} - 10\vec{j} - 30\vec{k}} \;\; \text{R.}$$

Vetor unitário ou versores

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{(-15, 10, 30)}{\sqrt{(-15)^2 + 10^2 + 30^2}} = \frac{(-15, 10, 30)}{\sqrt{225 + 100 + 900}} = \frac{(-15, 10, 30)}{\sqrt{1225}}$$

$$= \frac{1}{35}(-15, 10, 30) = \underline{\left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)} \;\; \text{R.}$$

$$\frac{\vec{v} \times \vec{u}}{|\vec{v} \times \vec{u}|} = \underline{\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)} \;\; \text{R.}$$

Ex 2: Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v}-\vec{u}$.

$$\begin{cases} \vec{u} = (1, 2, -1) \\ \vec{v} = (0, -1, 3) \end{cases}$$

área do paralelogramo: $A = \| 3\vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \|$

$3\vec{u} = 3(1, 2, -1) = (3, 6, -3)$

$\vec{v} - \vec{u} = (0, -1, 3) - (1, 2, -1)$

$\vec{v} - \vec{u} = (-1, -3, 4)$

$$3\vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (24 - 9)\vec{i} - (12 - 3)\vec{j} + (-9 + 6)\vec{k}$$

$$= 15\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$$

$A = \| (15, -9, -3) \|$

$A = \sqrt{15^2 + (-9)^2 + (-3)^2} = \sqrt{225 + 81 + 9} = \sqrt{315}$

$\boxed{A = 3\sqrt{35} \text{ u.a. (unidades de área)}}$ //

Ex 3: Calcular o valor de "a" para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$

$$\begin{cases} \vec{u} = (3, 1, -1) \\ \vec{v} = (a, 0, 2) \end{cases}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2)\vec{i} - (6+a)\vec{j} + (-a)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + (-6-a)\vec{j} - a\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-6-a)^2 + (-a)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 36 + 12a + a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 12a + 40}$$

$$\sqrt{2a^2 + 12a + 40} = 2\sqrt{6}$$

$$2a^2 + 12a + 40 = 4 \cdot 6$$

$$2a^2 + 12a + 40 = 24$$

$$2a^2 + 12a + 16 = 0 \quad \div (2)$$

$$a^2 + 6a + 8 = 0$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{(+6)^2 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

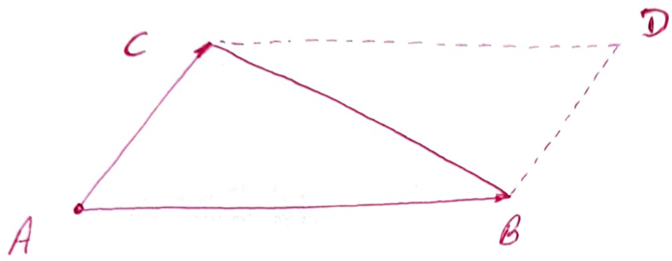
$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = -2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\underline{a = -4 \text{ ou } a = -2}}$$

Ex 4: Calcular a área do triângulo de vértices

$A(1,-2,1)$

$B(2,-1,4)$

$C(-1,-3,3)$



$$\text{Área } ABDC = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} = B - A = (1,1,3)$$
$$\vec{AC} = C - A = (-2,-1,2)$$

$$\vec{AB} \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2+3)\vec{i} - (2+6)\vec{j} + (-1+2)\vec{k}$$
$$= 5\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{5^2 + (-8)^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{25+64+1}$$
$$= \sqrt{90}$$
$$= 3\sqrt{10}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}\, 3\sqrt{10}$$

$$\boxed{\text{área do triângulo } ABC = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ u.a.}}$$

R.