Aula 10

Partículas idênticas

Princípio da exclusão de Pauli

"Para que servem tripletos e singletos ?"

Estados de spin de duas partículas

$$\begin{cases} |\chi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\chi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\,\right] \\ |\chi\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

Tripleto de spin 1

Conectados pelos operadores escada

Simétricos sob a troca de partículas

$$|\chi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$$

Singleto de spin 0

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\,\right]$$

"Aniquilado" pela escada

$$|\chi\rangle \rightarrow -|\chi\rangle$$

Antisimétrico sob a troca de partículas

Estados de spin de três partículas

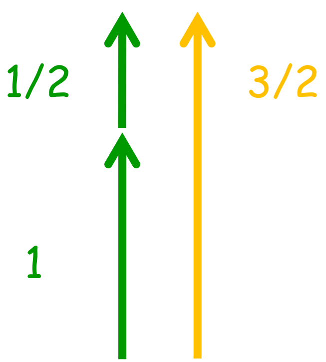
Spin 1/2 + Spin 1/2 =

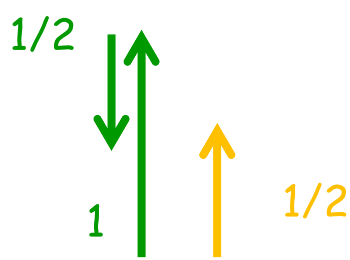
- Spin 0 (singleto)
- Spin 1 (tripleto)

Spin 1/2 + Spin 1/2 + Spin 1/2 =

- Spin 0 + Spin 1/2 =
  - Spin 1/2
- Spin 1 + Spin 1/2 =
  - Spin 1/2
  - Spin 3/2

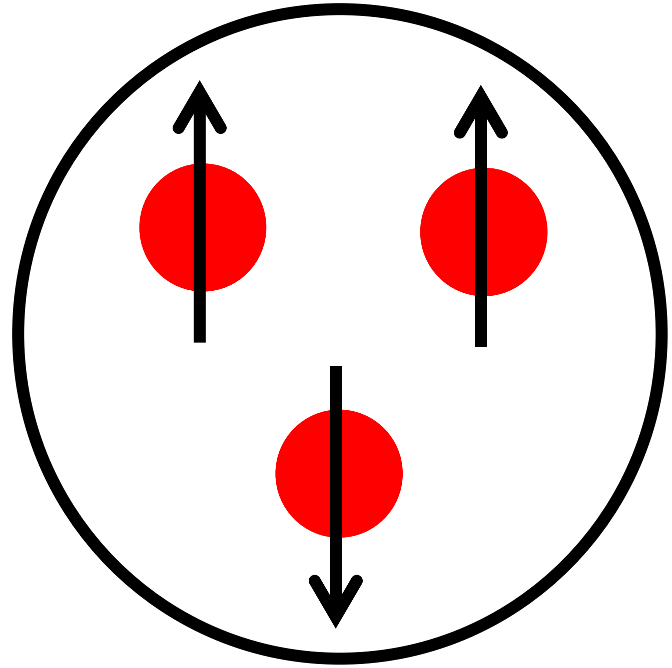
(Soma vetorial !)





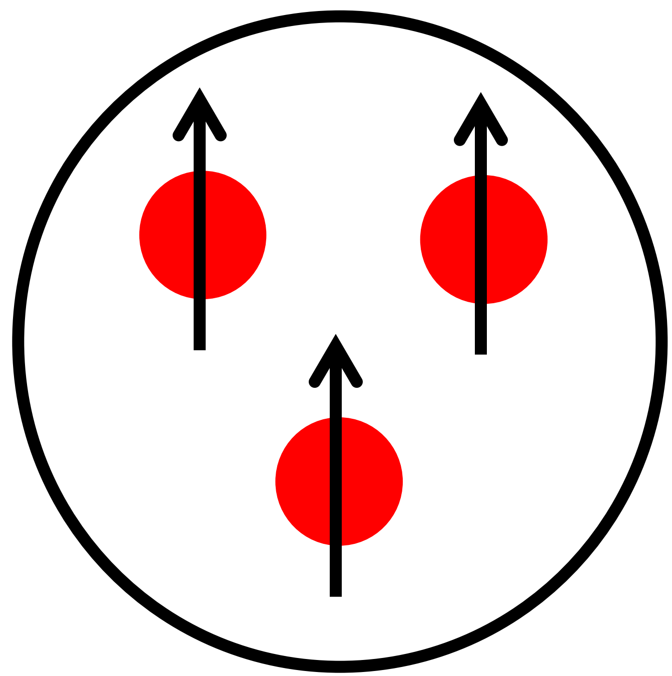
Spin 1 /2 = Próton

3 quarks com spin 1/2

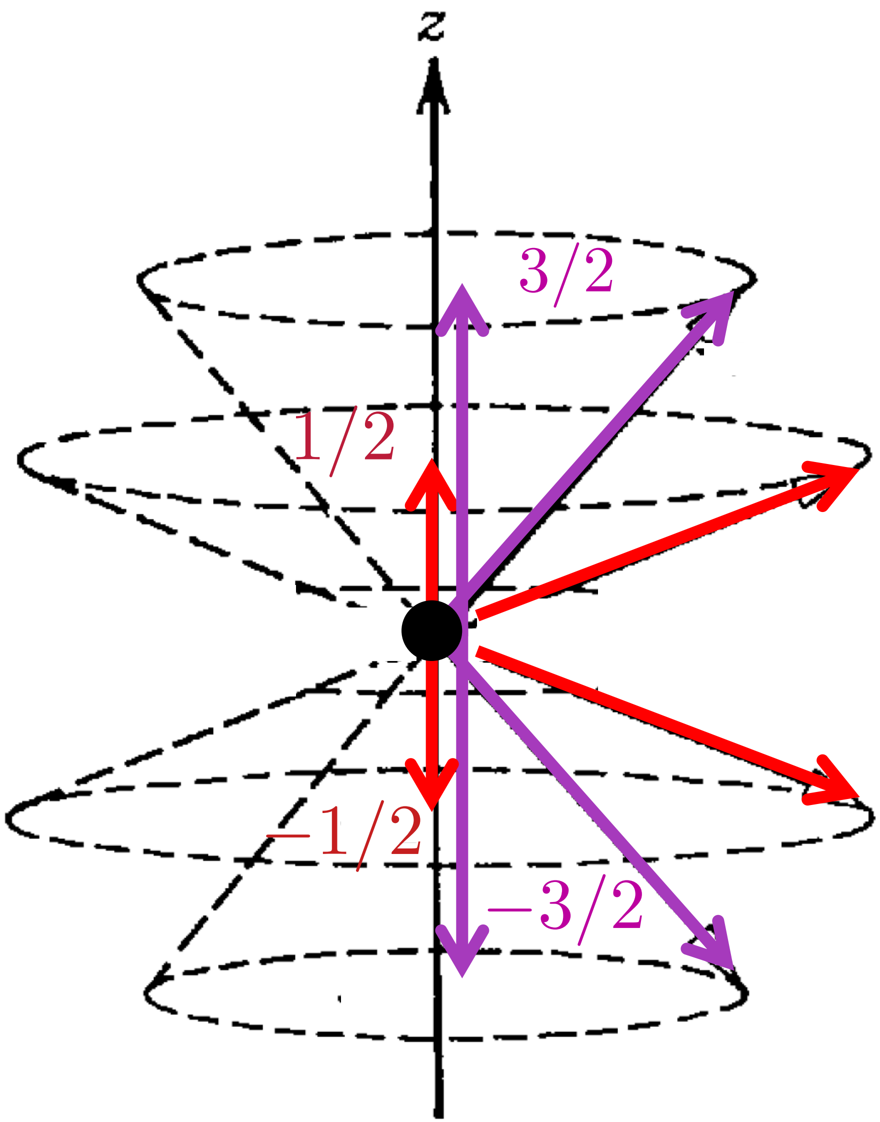


Spin 3 /2 = Delta Δ

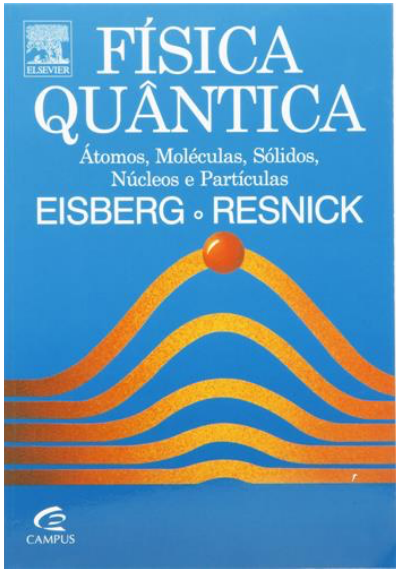
3 quarks com spin 1/2



Spin da Delta :



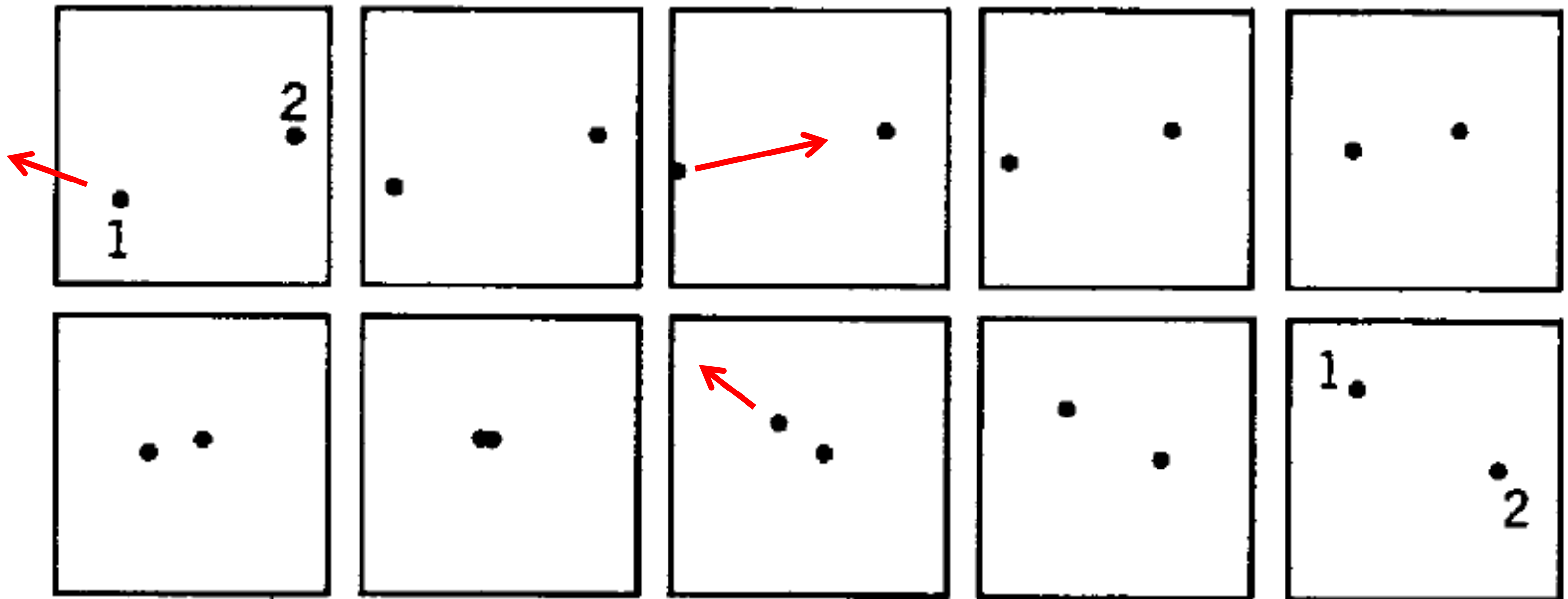
Partículas Idênticas

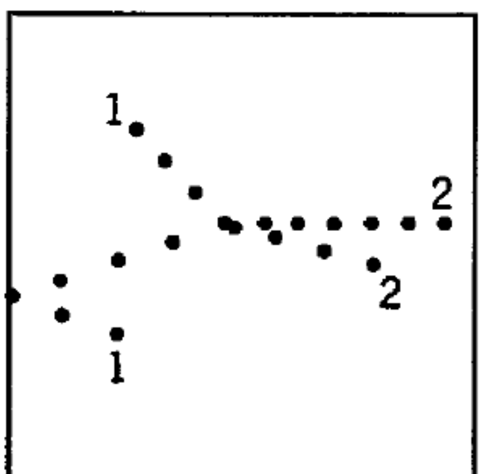


Capítulo 9

Partículas Idênticas : idéia

Física Clássica : acompanhamos no tempo cada uma das partículas : "bilhar"

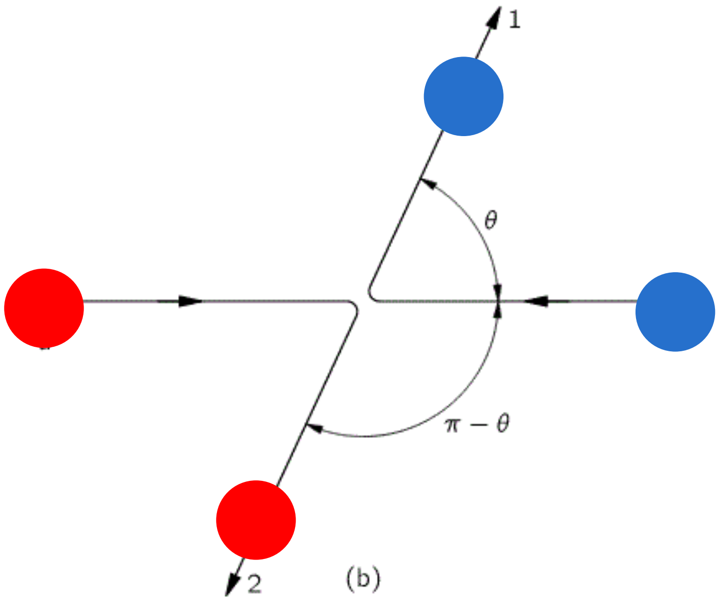




"Distinguimos" a partícula 1 da 2

Colisão Clássica :

Colisão de duas partículas idênticas (dois eletrons)



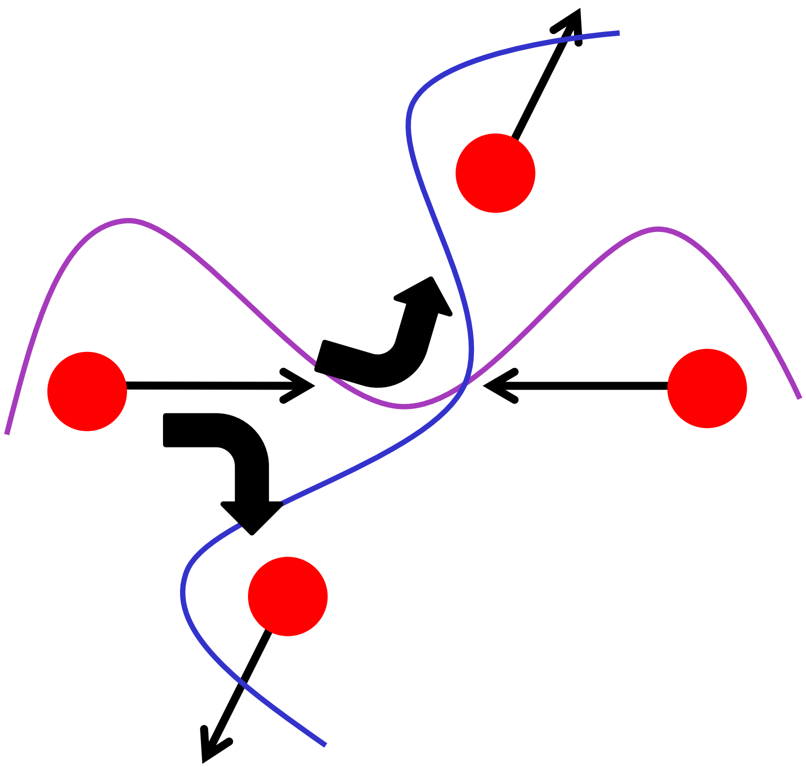
Podemos rotular ("pintar") cada partícula

Podemos definir bem as duas trajetórias

Podemos separar as duas partículas

Colisão Quântica :

Colisão de duas partículas idênticas (dois eletrons)

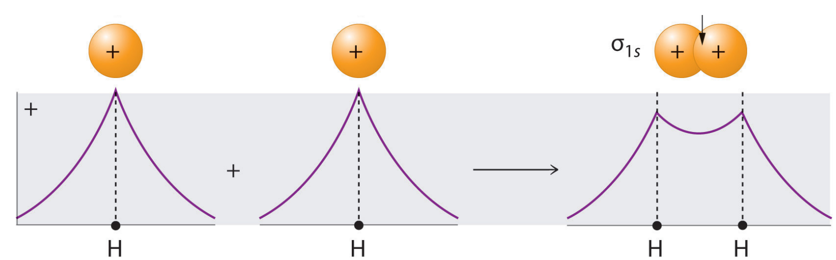


Não podemos rotular cada partícula

Não podemos definir as duas trajetórias

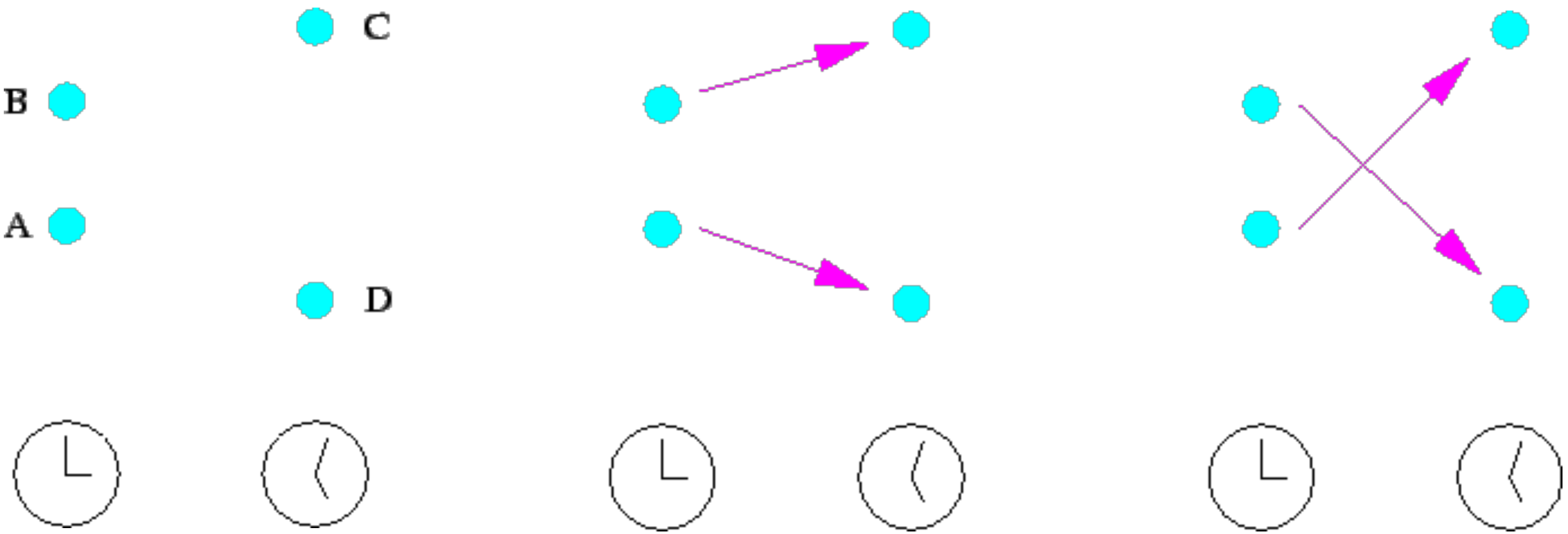
Não podemos separar as duas partículas

Superposição das funções de onda !



Física Quântica :

Evolução temporal de dois eletrons

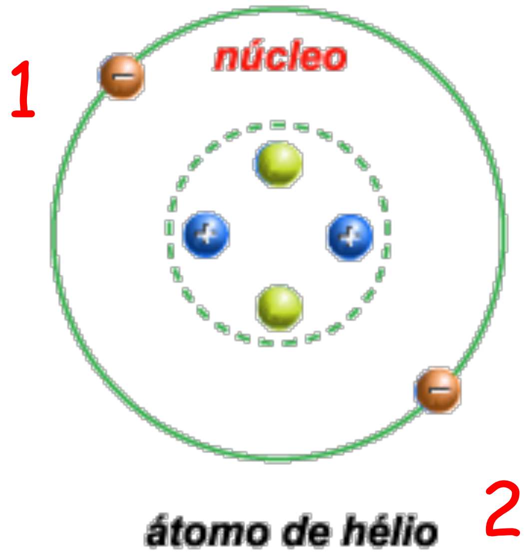


Dois eletrons são indistinguíveis !

Partículas Idênticas : descrição matemática

Qual é a função de onda que descreve duas partículas idênticas ?

Sistemas de duas partículas independentes



1 e 2 não interagem !

Para duas partículas distinguíveis:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)$$

é solução da eq. de Schrödinger !

$$\psi_\alpha\left(x_1, y_1, z_1\right) = \psi_{\underbrace{n\,,\,l\,,\,m}_{\text{números quânticos espaciais}}\,,\,m_s}\left(x_1, y_1, z_1\right)$$

m_s: número quântico de spin

Função de onda de duas partículas = produto das funções de onda de cada partícula

$$\begin{cases} \psi_\alpha\left(x_1, y_1, z_1\right) = \psi_\alpha(1) \\ \psi_\beta\left(x_2, y_2, z_2\right) = \psi_\beta(2) \end{cases}$$

1 2

$$\psi_T = \psi_\alpha(1)\,\psi_\beta(2)$$

$$\begin{cases} \psi_\beta\left(x_1, y_1, z_1\right) = \psi_\beta(1) \\ \psi_\alpha\left(x_2, y_2, z_2\right) = \psi_\alpha(2) \end{cases}$$

1 2

$$\psi_T = \psi_\beta(1)\,\psi_\alpha(2)$$

Grandeza observável não deve mudar se permutarmos as coordenadas !

Exemplo: densidade de probabilidade : $P = \psi^* \psi$

$$\psi_T = \psi_\alpha(1)\,\psi_\beta\,(2)$$

$$\psi_T^*\,\psi_T = \psi_\alpha^*(1)\,\psi_\beta^*\,(2)\,\psi_\alpha(1)\,\psi_\beta\,(2) \qquad \text{(A)}$$

Vamos fazer a permutação : $1 \rightarrow 2 \qquad 2 \rightarrow 1$

$$\psi_\alpha^*(1)\,\psi_\beta^*\,(2)\,\psi_\alpha(1)\,\psi_\beta\,(2) \rightarrow \psi_\alpha^*(2)\,\psi_\beta^*\,(1)\,\psi_\alpha(2)\,\psi_\beta\,(1) \qquad \text{(B)}$$

(A) é diferente de (B) !

$$\psi_T = \psi_\alpha(1)\,\psi_\beta\,(2)$$

Não é boa !!!

Duas alternativas que funcionam:

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_\alpha(1)\, \psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\, \psi_\alpha(2) \right]$$ (simétrica)

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_\alpha(1)\, \psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\, \psi_\alpha(2) \right]$$ (anti-simétrica)

Fazendo a permutação : $1 \rightarrow 2$ $\quad 2 \rightarrow 1$

$$\psi_S \rightarrow \psi_S \qquad\qquad \psi_S^*\, \psi_S \rightarrow \psi_S^*\, \psi_S$$

$$\psi_A \rightarrow -\psi_A \qquad\qquad \psi_A^*\, \psi_A \rightarrow \psi_A^*\, \psi_A$$

Densidade de probabilidade não muda quando trocamos as posições !!!

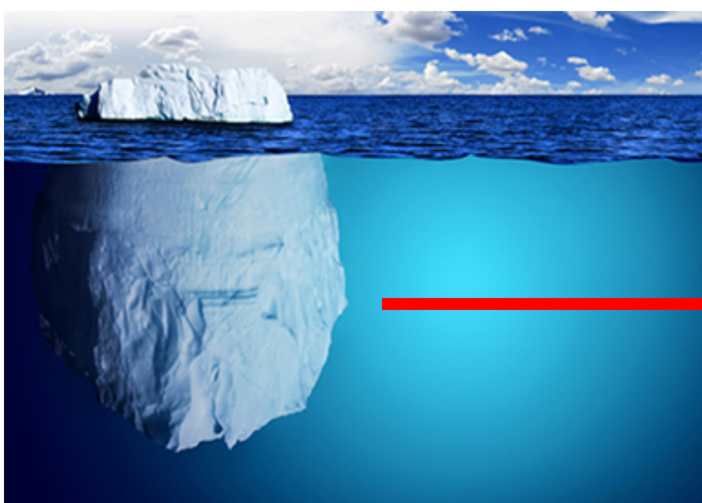
Como escolher entre as duas ?

Partículas de spin 1/2, 3/2... = Fermions

Para fermions escolhemos ψ_A

Partículas de spin 0, 1, 2... = Bosons

Para bosons escolhemos ψ_S



$\longrightarrow$ Teoria quântica de campos !

Partículas Idênticas: princípio da exclusão

Princípio da Exclusão

Wolfgang Pauli

Versão fraca:

Em um átomo multieletrônico nunca pode haver
mais de um elétron ocupando o mesmo estado quântico !

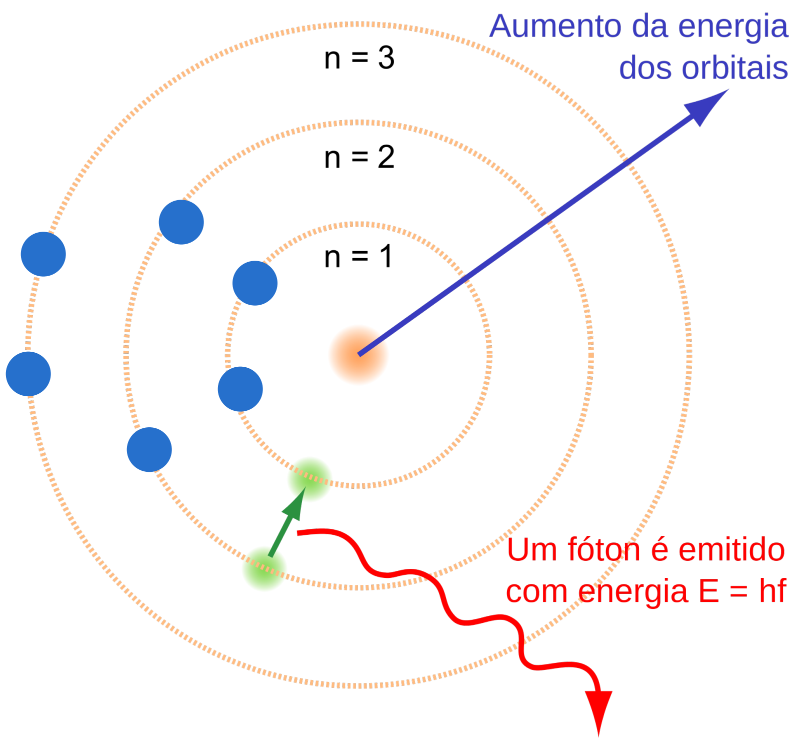
$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_\alpha(1)\, \psi_\alpha(2) - \psi_\alpha(1)\, \psi_\alpha(2) \right] = 0$$

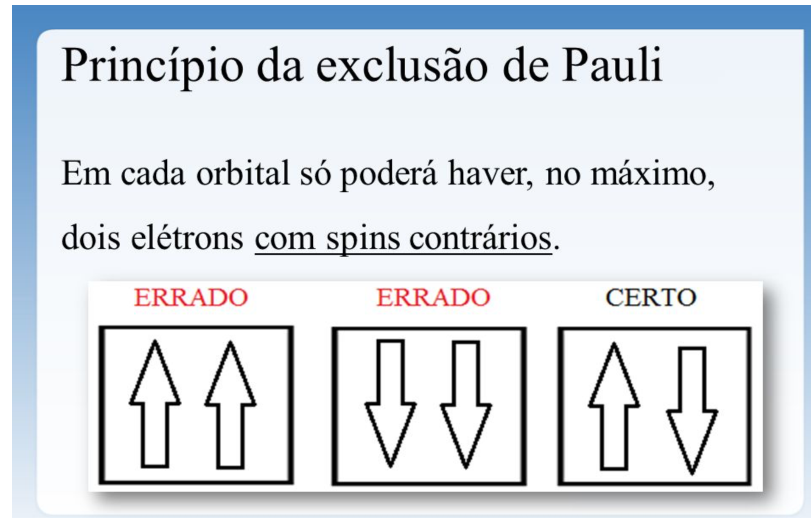
Versão forte:

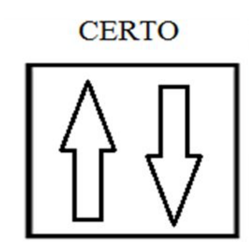
Um sistema de fermions deve ser descrito
por uma autofunção total anti-simétrica !

PE resolve um problema do átomo de Bohr :

Porque os eletrons não ficam todos no estado fundamental ?

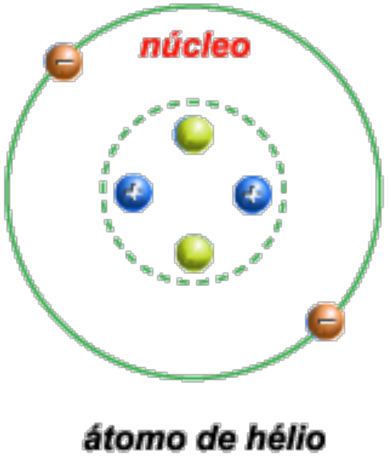




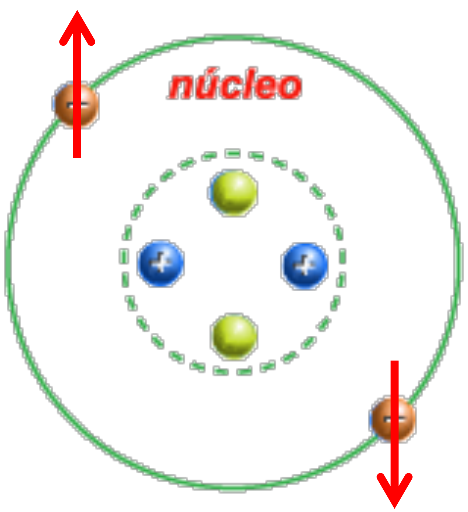


$$
\begin{cases}
\alpha: \quad n = 1 \quad l = 0 \quad m = 0 \quad m_s = +1/2 \\
\beta: \quad n = 1 \quad l = 0 \quad m = 0 \quad m_s = -1/2
\end{cases}
$$

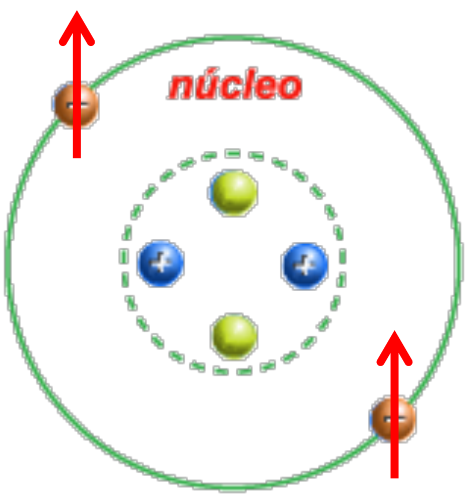
Partículas Idênticas: "forças" de troca no átomo de Hélio



Os dois eletrons não interagem eletricamente mas pode haver uma repulsão ou atração entre eles: um efeito quântico gerado pelo spin !



Atração !



Repulsão !

Melhorando a notação:

$$\psi_\alpha (x_1, y_1, z_1) = \psi_{n\,,\,l\,,\,m\,,\,m_s} (x_1, y_1, z_1) = \psi_a(1)\ \psi_{m_s}$$

autofunção espacial

autofunção de spin

Função de onda de dois eletrons:

$$\psi_T = \psi_a(1)\,\psi_b\,(2)\,\psi_{m_{s1}}\,\psi_{m_{s2}} = \psi_e\ \psi_{spin}$$

deve ser anti-simétrica !!!

Há duas possibildades:

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a\,(1)\,\psi_b\,(2) + \psi_b\,(1)\,\psi_a\,(2)\right] \qquad \psi_{spin}$$

simétrica — anti-simétrica

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a\,(1)\,\psi_b\,(2) - \psi_b\,(1)\,\psi_a\,(2)\right] \qquad \psi_{spin}$$

anti-simétrica — simétrica

Exemplos:

$$\psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(1)\,\psi_b(2) + \psi_b(1)\,\psi_a(2) \right] \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\,|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\, \right]$$

simétrica anti-simétrica

$$\psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(1)\,\psi_b(2) - \psi_b(1)\,\psi_a(2) \right] \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\,|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\, \right]$$

anti-simétrica simétrica

Eletrons próximos : $x_1 \simeq x_2 \quad y_1 \simeq y_2 \quad z_1 \simeq z_2$

$$\psi_a(1) \simeq \psi_a(2) \qquad \psi_b(1) \simeq \psi_b(2)$$

$$\psi_a(1)\,\psi_b(2) = \psi_b(1)\,\psi_a(2)$$

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(1)\,\psi_b(2) - \psi_b(1)\,\psi_a(2)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(2)\,\psi_b(1) - \psi_b(1)\,\psi_a(2)\right] = 0$$

0

$$\psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(1)\,\psi_b(2) - \psi_b(1)\,\psi_a(2)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\,\right]$$

Pequena probabilidade dos eletrons do tripleto estarem próximos !

"Repulsão" do tripleto !

Eletrons próximos : $x_1 \simeq x_2 \quad y_1 \simeq y_2 \quad z_1 \simeq z_2$

$$\psi_a(1) \simeq \psi_a(2) \qquad \psi_b(1) \simeq \psi_b(2)$$

$$\psi_a(1)\,\psi_b(2) = \psi_b(1)\,\psi_a(2)$$

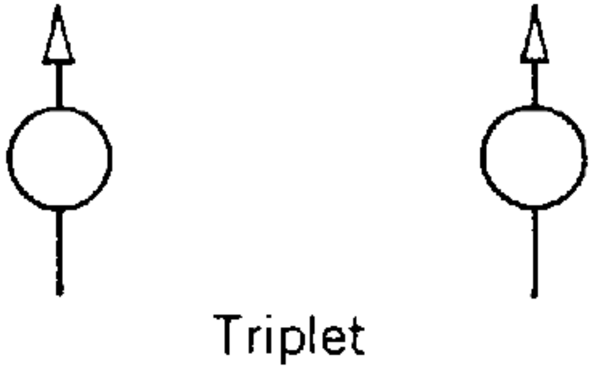
$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(1)\,\psi_b(2) + \psi_b(1)\,\psi_a(2)\right]$$

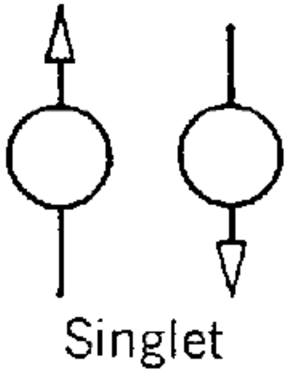
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(2)\,\psi_b(1) + \psi_b(1)\,\psi_a(2)\right] = \sqrt{2}\,\psi_b(1)\,\psi_a(2)$$

Não há supressão como no caso anterior !

Maior probabilidade dos eletrons do singleto estarem próximos !

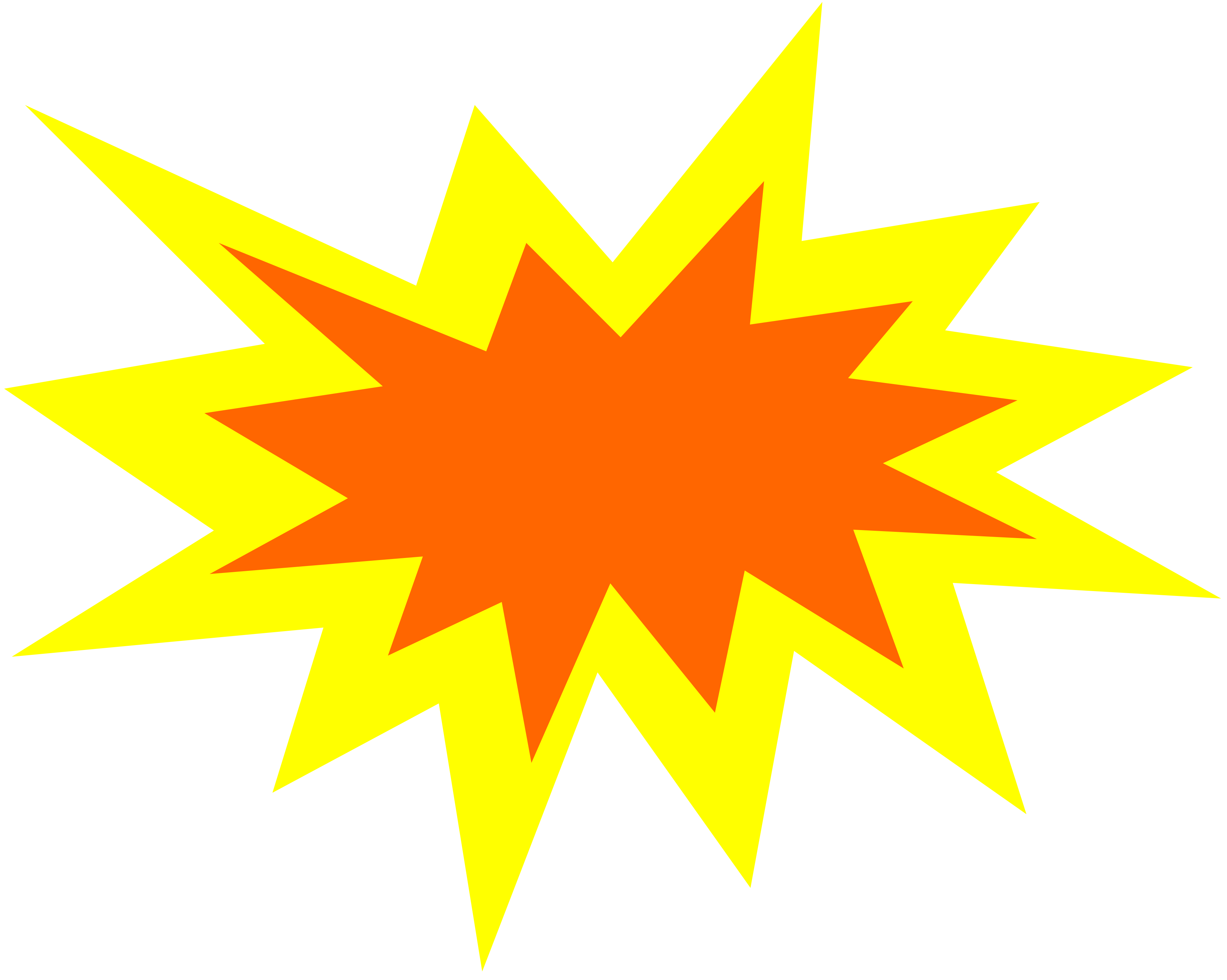
"Atração" do singleto !





"Repulsão" do tripleto !

"Atração" do singleto !



Estados de spin de duas partículas

$$\begin{cases} |1\ 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = \chi_+^{(1)}\,\chi_+^{(2)} = |\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle \\ |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle \\ |1\ -1\rangle = |\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$

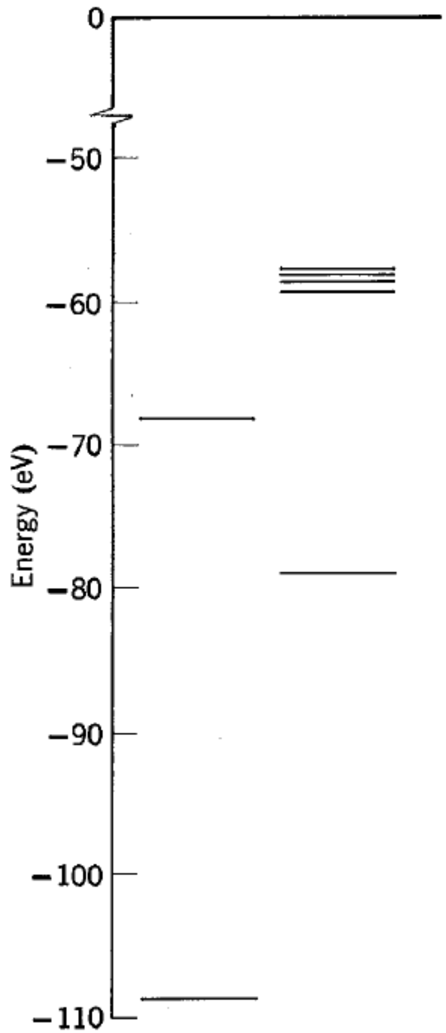
$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}\rangle$$

$$\boxed{|s\ m_s\rangle = \sum_{m_1\,m_2} C^{s_1\,s_2}_{m_1\,m_2}\,|s_1\ m_1\rangle\,|s_2\ m_2\rangle}$$

Forças de "troca"no átomo de Hélio

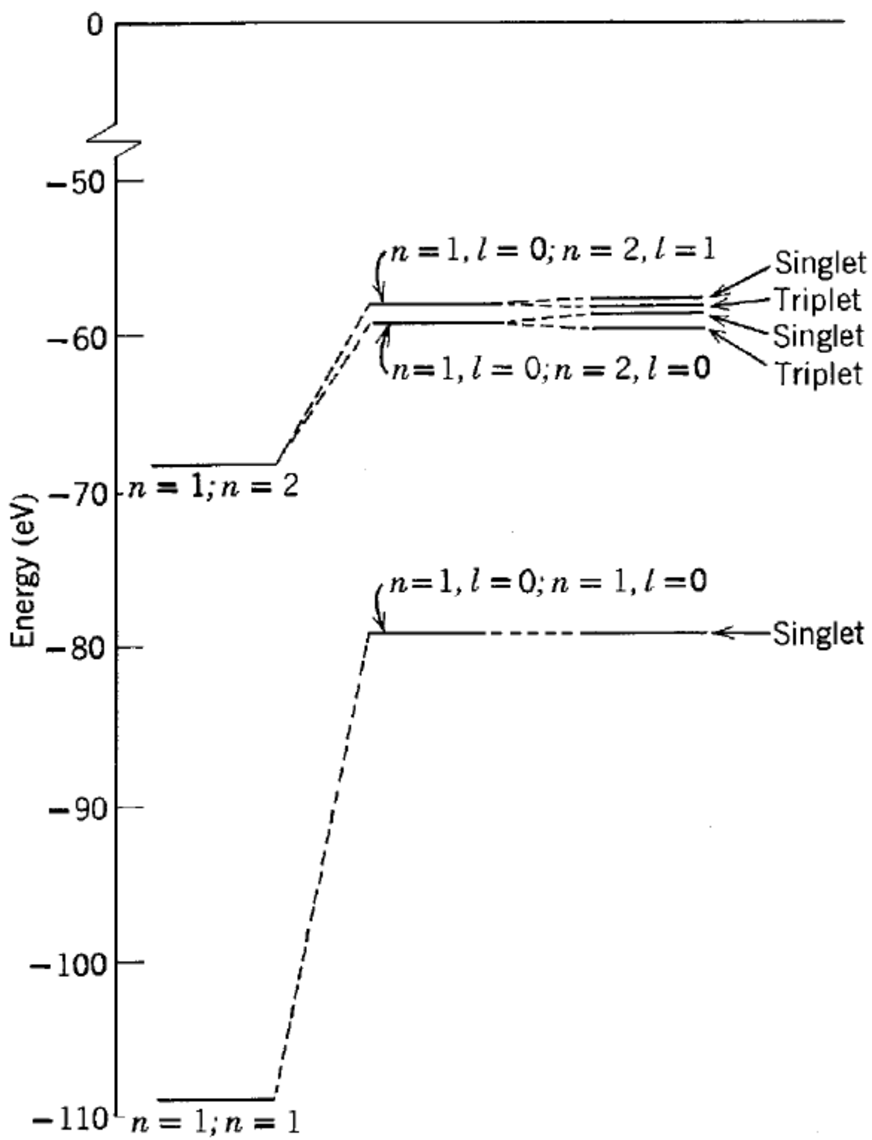
Níveis de energia
dos eletrons do Hélio

dois eletrons
independentes



Níveis observados !

Forças de "troca"no átomo de Hélio



Exercício: ler e entender este exemplo !

Exercício: verifique que a permutação de 1 e 2 leva a uma densidade de probabilidade diferente !

$$\psi_T = \psi_\beta(1)\,\psi_\alpha(2)$$

$$\psi_T^*\,\psi_T = \psi_\beta^*(1)\,\psi_\alpha^*(2)\,\psi_\beta(1)\,\psi_\alpha(2)$$

Estamos abusando das imagens ?

Eu acho o seguinte:

(Marco Antônio Moreira)

para dar significado ao conceito de partícula elementar (elétrons, prótons, nêutrons, quarks,...) não deve ser usado o conceito prévio de partícula como uma bolinha invisível. Partículas elementares não são bolinhas. As bolinhas nesse caso funcionam como obstáculo epistemológico.

É melhor não fazer imagem nenhuma !

(torcida do Corinthians + Barcelona + Real Madrid + ...)

Estados de spin de duas partículas

$$\left\{\begin{array}{l} |\chi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\[2ex] |\chi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\downarrow\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\uparrow\rangle \\[2ex] |\chi\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{array}\right.$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\uparrow\rangle$$