

Expressões dos Campos em Termos Próximos e Distantes

[W. Panofsky & M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism, Cap. 14]

→[Bo Thidé; Electromagnetic Field Theory; Cap. 5]

Campos devidos a fontes não-estacionárias

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret} - \frac{1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \right]_{ret} \right\} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \right]_{ret} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\}; t'_{ret} = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$$

campo de indução retardado

campo de radiação

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla' \cdot \vec{j} = 0$$

Substituindo na segunda integral, temos

$$\int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret} dV' = - \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} [\nabla' \cdot \vec{j}]_{ret} dV'$$

Regras para operações envolvendo o tempo retardado

$\nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \rightarrow$

- 1) calcular todas as derivadas parciais com relação a (x', y', z') mantendo $\vec{r}$; t fixos;
- 2) derivada agrega um termo a mais devido à dependência implícita de t'_{ret} com $\vec{r}'$.

$[\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \rightarrow$

- 1) calcular todas as derivadas parciais com relação a (x', y', z') mantendo t' fixo (e também $\vec{r}, t$);
- 2) no resultado, onde houver t' , substituir por $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$.

Assim

$$\nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} = [\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} + \left[\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\nabla' t'_{ref})$$


Substituindo este resultado na segunda integral, temos

$$\int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret} dV' = - \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} dV' +$$

$$+ \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \left[\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} dV'$$

A primeira integral do lado direito pode modificada introduzindo a díada

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{j}(\vec{r}', t') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Utilizando a relação vetorial $\nabla \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ essa integral pode ser escrita como

$$\int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} dV'$$

$$= \int \nabla' \cdot \left\{ [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\} dV' - \int ([\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \cdot \nabla') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

Pelo Teorema de Gauss para tensores, $\int \nabla \cdot \vec{T} dV = \int d\vec{S} \cdot \vec{T}$, a primeira integral pode ser transformada em uma integral sobre uma superfície esférica, cujo raio tomamos muito maior que as dimensões da fonte, de forma que $\vec{j} = 0$ sobre ela. Assim, a integral fica

$$\int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \nabla' \cdot [\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} dV' = - \int ([\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \cdot \nabla') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

Em coordenadas cartesianas

$$(\vec{j} \cdot \nabla') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \sum_i \left(j_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2};$$

$$j_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = - \frac{j_i \hat{e}_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + 2 \frac{[j_i (x_i - x'_i)] (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}$$

$$\therefore (\vec{j} \cdot \nabla') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} [[\vec{j} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] (\vec{r} - \vec{r}') - \vec{j} |\vec{r} - \vec{r}'|^2] + \frac{[\vec{j} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}$$

$$(\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A}$$

Com essas transformações obtemos

$$\begin{aligned}
 & ([\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} \cdot \nabla') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\
 &= \frac{[[\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} + \frac{[[\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} \times (\vec{r} - \vec{r}')] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}
 \end{aligned}$$

A segunda integral, que tem $\left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret}$ no integrando, pode ser combinada com a terceira integral para $\vec{E}(\vec{r}, t)$, que também tem o mesmo termo, ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\vec{r} - \vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} - \frac{1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} = \\
 &= \frac{1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left\{ \left[\left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right] (\vec{r} - \vec{r}') - |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \right\}
 \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes novamente pode ser escrita como duplo produto vetorial

Combinando todos esses resultados, finalmente a expressão para o campo elétrico fica

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \\ & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} (\vec{r} - \vec{r}') dV' + \\ & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV' + \\ & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\left[\left[\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} \times (\vec{r} - \vec{r}') \right] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'\end{aligned}$$

**Campo retardado
de Coulomb**

Campo intermediário

Campo intermediário

Campo de radiação

Porque os campos de radiação tem que $\sim 1/r$?

Vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}; \quad I = \oint \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

