5^a Lista de exercícios

Intr. à Relatividade — Data de entrega: 08/06

① [1.5] Nas minhas notas de aula eu discuti como uma onda gravitacional se propagando na direção z possui amplitudes $\epsilon_{\mu\nu}$, com:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{+} & h^{\times} & 0 \\ 0 & h^{\times} & -h^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Uma transformação de coordenadas $x \to x'$ que é simplesmente uma rotação em torno do eixo z por um ângulo φ é dada pela matriz:

$$R^{\alpha}_{\ \beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sabendo que as perturbações da métrica se transformam como $h'_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\ \mu} R^{\beta}_{\ \nu} h_{\alpha\beta}$, mostre que as amplitudes no novo referencial, $\epsilon'_{\mu\nu}$, são tais que $h'^{+} = h^{+} \cos 2\varphi - h^{\times} \operatorname{sen} 2\varphi$ e $h'^{\times} = h^{\times} \cos 2\varphi + h^{+} \operatorname{sen} 2\varphi$.

② [2.5] Na Aula 21 eu cheguei numa equação que eu disse que é basicamente a Equação do Desvio Geodésico:

$$\frac{d^2 \Delta X^{\mu}}{d\tau^2} + \partial_{\nu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \, \Delta X^{\nu} \, U^{\alpha} U^{\beta} + 2 \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \, U^{\alpha} \, \frac{d \Delta X^{\beta}}{d\tau} = 0 .$$

Mostre que, introduzindo a derivada direcional:

$$\frac{D \Delta X^{\mu}}{D\tau} = \frac{d X^{\nu}}{d\tau} \, D_{\nu} (\Delta X^{\mu}) ,$$

podemos escrever a primeira equação acima na sua forma mais usual:

$$\frac{D^2 \Delta X^{\mu}}{D\tau^2} = -R^{\mu}_{\ \alpha\nu\beta} \, \Delta X^{\nu} \, U^{\alpha} U^{\beta} .$$

③ [1.5] Vimos em sala de aula o efeito que as polarizações h^+ e $h^\times$ exercem sobre uma configuração circular de massas no plano ortogonal à direção de propagação da onda (na ocasião, assumimos que essa direção era z, e colocamos as massas no plano $x - y$). Vimos que a polarização h^+ contrai e expande esse círculo alternadamente, ao longo das direções x e y, enquanto que a polarização $h^\times$ faz o mesmo, mas girado de 45°.

Suponha que temos uma onda gravitacional cuja polarização é dada por:

$$\epsilon^{L,R}_{\mu\nu} = \epsilon^{+}_{\mu\nu} \pm i\epsilon^{\times}_{\mu\nu} \ ,$$

onde $\epsilon^{+;\times}_{\mu\nu}$ são polarizações "puras", que só possuem a amplitude h^+ (no caso de $\epsilon^{+}_{\mu\nu}$), ou só a amplitude $h^\times$ (no caso de $\epsilon^{\times}_{\mu\nu}$). Encontre os efeitos que essas duas ondas gravitacionais planas exercem sobre uma distribuição circular de matéria.

④ [4.5] Considere duas massas idênticas m presas a uma mola de massa desprezível. Essas massas oscilam em torno da posição de equilíbrio fazendo um movimento no eixo z dado por:

$$z_{\pm}(t) = \pm \left[z_0 + a e^{i\omega t} \right] \ ,$$

(a) Assuma que se tratam de massas pontuais e calcule o momento de quadrupolo "reduzido" desse sistema:

$$Q^{ij} = \int d^3x \, \rho(\vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta^{ij} \right) \ .$$

(b) Assumindo que estamos observando esse sistema desde uma distância muito grande ($r \gg z_0$), encontre a expressão para as perturbações da métrica correspondentes as ondas gravitacionais emitidas por esse sistema de massas aceleradas (não esqueça de detalhar as dependências espacial e temporal, assim como as polarizações).

(c) A potência irradiada em ondas gravitacionais por um quadrupolo que varia no tempo é dada por:

$$P = \frac{dE}{dt} \simeq \frac{G}{10\, c^5} \left| \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right|^2 \ .$$

Dado que a energia do oscilador harmônico é $E = 1/(2m)\,\omega^2 a^2$, qual a *taxa* com a qual a amplitude do oscilador (a) deve decair com o tempo, devido à emissão de ondas gravitacionais? Primeiro obtenha o resultado geral, assumindo que $a \ll z_0$. Depois, calcule o resultado caso tenhamos uma massa de $m = 100$ kg, uma frequência de oscilação $\omega = 10^3$ Hz, uma posição de equilíbrio $z_0 = 1$ m e uma amplitude de oscilação de $a = 1$ cm .