

Integração Numérica

Parte III

Elias S. Helou Neto

Integração Numérica

Produto Interno

$$\blacktriangleright \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$$

Integração Numérica

Produto Interno

▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$

▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ sse $\mathbf{x} \neq 0$

Integração Numérica

Produto Interno

- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ sse $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Integração Numérica

Produto Interno

- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ sse $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- ▶ $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Integração Numérica

Produto Interno

$$\blacktriangleright \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

Integração Numérica

Produto Interno

► $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$

► $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M := \langle M\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Integração Numérica

Produto Interno

- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M := \langle M\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- ▶ $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

Integração Numérica

Produto Interno

► $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

Integração Numérica

Produto Interno

- ▶ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}$ é ortogonal a $\mathbf{y}$

Integração Numérica

Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dados $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ LI

$$1. \quad \tilde{\mathbf{v}}_k \leftarrow \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Integração Numérica

Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dados $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ LI

$$1. \quad \tilde{\mathbf{v}}_k \leftarrow \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

$$2. \quad \mathbf{v}_k \leftarrow \frac{\tilde{\mathbf{v}}_k}{\|\tilde{\mathbf{v}}_k\|}$$

Integração Numérica

Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dados $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ LI

$$1. \quad \tilde{\mathbf{v}}_k \leftarrow \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

$$2. \quad \mathbf{v}_k \leftarrow \frac{\tilde{\mathbf{v}}_k}{\|\tilde{\mathbf{v}}_k\|}$$

$$3. \quad k \leftarrow k + 1$$

Integração Numérica

Ortonormalização de Gram-Schmidt

Exemplo:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

$$\blacktriangleright \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p_n(x) dx$$

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

- ▶ $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p_n(x)dx$
- ▶ $q_n(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$
é tal que

$$\langle q_n, p \rangle = 0$$

para qualquer polinômio p de grau menor ou igual a n

Exemplo com $n = 2$

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

Exemplo com $n = 2$

► $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

Exemplo com $n = 2$

▶ $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

▶ $x_1 = 0$

Exemplo com $n = 2$

▶ $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

▶ $x_1 = 0$

▶ $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

$$\begin{aligned} & f(x_0) \int_{-1}^1 \ell_0(x) dx \\ & + f(x_1) \int_{-1}^1 \ell_1(x) dx \\ & + f(x_2) \int_{-1}^1 \ell_2(x) dx \end{aligned}$$

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

► nós não são equidistantes

Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

- ▶ nós não são equidistantes
- ▶ nós não incluem os extremos

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 p_n(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_n(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_n(x) = \int_{-1}^1 f(x) - p_{n+1}(x) + (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_0] dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_{n+1}(x) + q(x)f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_0]dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) - p_{n+1}(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_{n+1}(x) dx =$$
$$\int_{-1}^1 f(x) - p_{n+2}(x) + q(x)(x - \bar{x}_0) f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_0, \bar{x}_1] dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) - p_{n+2}(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) - p_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) - p_{2n+1}(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 (x-x_0) \cdots (x-x_n)(x-\bar{x}_0) \cdots (x-\bar{x}_n) \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 (x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 (x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2 dx$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\frac{f^{(6)}(\xi)}{720} \frac{8}{175} = \frac{f^{(6)}(\xi)}{15750}$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(t) dt$$

$$g(t) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\frac{g^{(6)}(\xi)}{15750}$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \frac{f^{(6)}(\eta)}{15750}$$
$$\eta = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

Integração Numérica

Erro na Quadratura Gaussiana

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \frac{f^{(6)}(\eta)}{15750}$$