

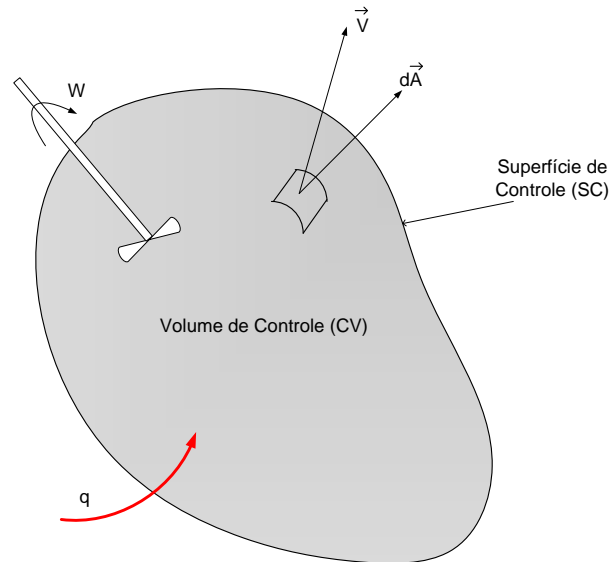
## MÓDULO 1

### 1- REVISÃO DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Nesta aula serão revistos os conceitos fundamentais de Mecânica dos Fluidos.

#### 1.1 Equações Fundamentais da Mecânica dos Fluidos

Considere um volume de controle (VC) fixo, como aquele esquematizado na Figura 1, onde  $\vec{V}$  é a velocidade com que o fluido entra ou sai do volume de controle através da superfície de controle (SC). A idéia de usar um volume de controle é que se pode imaginar que esse volume de controle seja um equipamento, trecho de tubulação, válvula, bomba e qualquer outro componente sobre o qual nossa atenção é dirigida. Sobre esse volume de controle aplicam-se as leis de conservação da natureza com a finalidade de se obter expressões de engenharia a partir das quais se possam estimar ou calcular grandezas relevantes, como perdas de pressão devido ao atrito e outros fenômenos aero e hidrodinâmicos, acelerações e desacelerações do fluido, vazões, entre outras. Esse é o chamado método *euleriano* de análise que será utilizado neste curso. A outra possibilidade é acompanhar diminutas porções de fluido (partícula de fluido) e tentar analisar seu comportamento físico e interações mútuas. Claro que, no caso da mecânica dos fluidos, essa abordagem, chamada de *lagrangeana*, traz sérios problemas formidáveis não só de aplicação das leis de conservação, introduz dificuldades de modelagem matemática que são insuperáveis para muitos problemas de interesse prático. A seguir são apresentadas as leis de conservação aplicadas ao volume de controle da Figura 1.



**Figura 1** – Esquema de um volume de controle generalizado.

### 1.1.1 Conservação de massa

Essa lei é baseada na simples, porém fundamental informação de que “A massa de fluido do volume de controle se conserva num dado instante de tempo  $t$ ”. Além disso, não ocorrem efeitos relativísticos de intercâmbio entre massa e energia. Isso em termos matemáticos significa que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1)$$

### 1.1.2 Conservação da quantidade de movimento

“A resultante  $\vec{R}$  das forças exercidas sobre um corpo é igual à taxa da variação da quantidade de movimento – 2ª Lei de Newton”. Aqui vamos subentender que “corpo” se aplica ao fluido que se encontra dentro do volume de controle fixo.

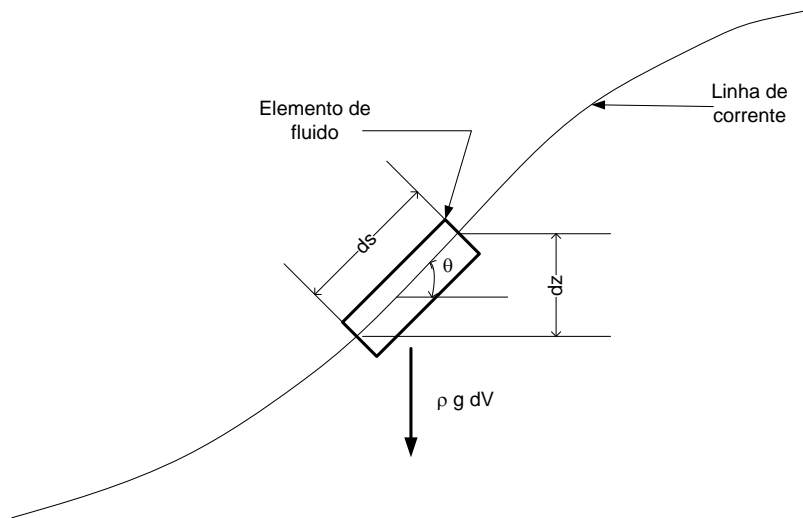
Em termos matemáticos, a 2ª lei de Newton expressa que:

$$\vec{R} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2)$$

Nota: esta é uma equação vetorial!

Se uma partícula do fluido percorre um determinado caminho em certo tempo e, se a cada instante sua posição espacial for marcada, o traçado formado por cada posição espacial daquela partícula de fluido forma o que se chama de *linha de corrente*. A linha de corrente é sempre tangente ao vetor velocidade de um determinado escoamento. Se o escoamento for laminar, a linha de corrente será uma linha reta, tangente aos vetores de velocidade daquele escoamento.

Considere o elemento de fluido escoando sobre uma linha de corrente (escoamento permanente), conforme ilustrado na Figura 2.



**Figura 2** – Elemento de Fluido em escoamento permanente ao longo de uma linha de corrente.

Se não forem feitas considerações acerca de efeitos do atrito do elemento de fluido, então a equação (2) após várias manipulações, resulta em:

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + V dV = 0 \quad (4)$$

o que após integração resulta em:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \phi = cte \quad (5)$$

Esta forma de equação de Bernoulli também pode ser obtida da equação de Euler. Note que ela é válida ao longo de uma linha de corrente e escoamento isoentrópico.

Se o fluido for incompressível, isto é,  $\rho = \text{cte}$ , tem-se:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho\phi = \text{const.} \quad (6)$$

Como  $\phi = gz$ , sendo que  $z$  é a cota ou altura manométrica, então:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{const.} \quad (7)$$

Esta equação (Eq. Bernoulli) é válida para as hipóteses feitas até então, ou seja, é válida somente para um escoamento ideal ou *escoamento potencial*, entendendo-se que o fluido é, termodinamicamente falando, reversível.

### 1.1.3 Conservação da Energia

“A variação da energia do volume de controle, limitado por uma superfície de controle, é totalmente devida às parcelas de energia que entram ou que saem por essa superfície”. Assim, a energia total se conserva.

Pode-se expressar a lei da conservação da energia para o volume e controle da Figura 1, como sendo:

$$\frac{\delta q}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{SC} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (8)$$

onde  $q$  é o calor,  $W_s$  é o trabalho produzido ou fornecido ao,  $e$  representa outras formas de energia e  $P$  é a pressão no volume de controle.

A Eq. de Bernoulli não é valia para casos em que ocorrem perdas (irreversibilidades) em um sistema. A equação que poderá contabilizar todas as perdas é a Equação da Energia, dada por:

$$dW_s + \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gdz + d(\text{perdas}) = 0 \quad (9)$$

que integrando nos fornece:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{W_S}{g} + (\text{perdas}_{1-2}) \quad (10)$$

Sendo  $\gamma = \rho g$ , o peso específico do fluido e  $W_S$  é o trabalho por unidade de massa.

Na equação da energia aplicada ao volume de controle, Eq. (9), as perdas são normalmente obtidas de forma experimental. Assim, pode-se expressar a equação da energia como sendo:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{W_S}{g} + \frac{h_f}{g} \quad (11)$$

Sendo que  $h_f$  representa as perdas totais de energia do escoamento de um fluido em função do atrito.

## 1.2 Perdas de Carga em Escoamento de Fluidos

O conhecimento dos efeitos de perda de energia útil associada ao escoamento dos fluidos é de grande importância nessa análise. As perdas de cargas ou transformações de energias ocorrem devido ao atrito do fluido com o meio onde está escoando (tubulação) e também com outros obstáculos que fazem parte desse meio (válvulas, registros, bocais, curvas, etc).

Essas perdas podem ser divididas em duas categorias:

- **perdas distribuídas:** aquelas devidas ao atrito do fluido com a tubulação;
- **perdas localizadas:** aquelas devidas ao atrito ou efeitos aero ou hidrodinâmicos do fluido com um componente específico do sistema, como válvulas, bocais, registros, aberturas, curvas, etc.

### 1.2.1 Perdas de Carga Distribuídas

A perda *de carga distribuída* ao longo de uma tubulação ( $h_f$ ) pode ser determinada pela equação de Darcy-Weibach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}, \quad (12)$$

sendo que  $f$  é chamado de *fator de atrito de Darcy-Weisbach*,  $L$  é o comprimento da tubulação,  $V$  é a velocidade média do fluido e  $D$  é o diâmetro da tubulação. A perda de carga para um determinado sistema é proporcional à relação entre comprimento e o diâmetro do tubo e ao quadrado da velocidade média do fluido.

O fator de atrito  $f$  é, na verdade, uma função que depende de parâmetros associados ao escoamento ( $Re_D$ ) e do acabamento superficial da tubulação ( $\varepsilon/D$ ), ou seja:

$$f = f\left(Re_D, \frac{\varepsilon}{D}\right), \quad (13)$$

sendo  $Re_D$  o número de Reynolds em função do diâmetro da tubulação ( $D$ ) e  $\varepsilon/D$  é a rugosidade relativa do tubo. Ainda, temos que:

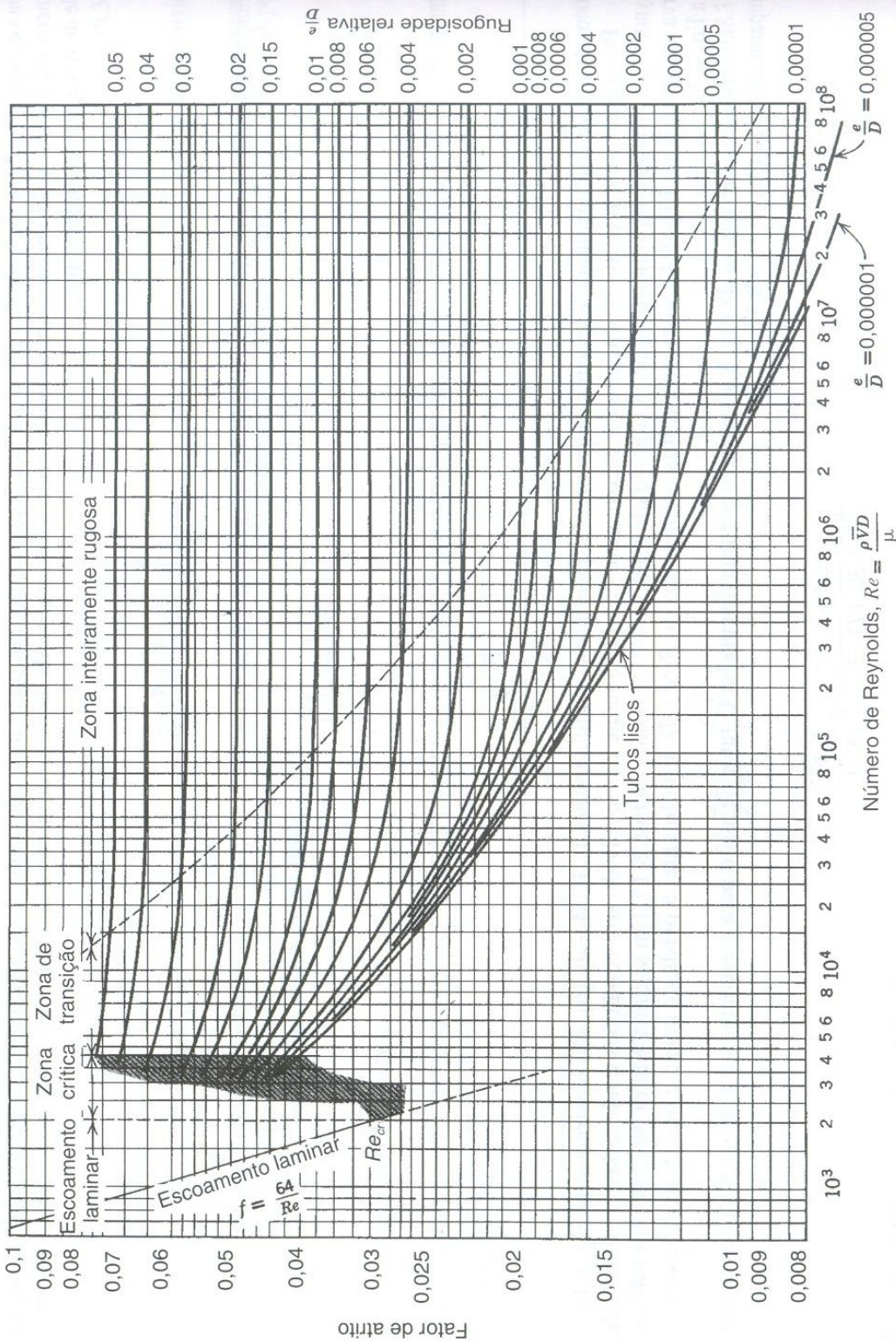
$$Re_D = \rho \frac{VD}{\mu} \quad (14)$$

Onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $V$  é a velocidade média do fluido,  $D$  é o diâmetro da tubulação e  $\mu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

A representação gráfica do fator de atrito  $f$  é apresentada na forma de um diagrama denominado “diagrama de Moody” e pode ser visto na Fig. 3.

Analisando o diagrama observa-se que a função  $f$  é relativamente complexa. Observa-se que ela possui comportamento diferente para três tipos distintos de regimes de escoamento a saber:

- escoamento laminar ( $Re_D < 2300$ )  $\Rightarrow f = (Re_D)$ ;
- escoamento turbulento ( $Re_D > 4500$ )  $\Rightarrow f = f(Re_D, \varepsilon/D)$ ;
- escoamento de transição laminar-turbulento ( $2000 < Re_D < 4000$ ).



**Figura 3** – Diagrama de Moody (Permissão da ASME, L.G. Moody, “Friction Factors for Pipe Flow”, ASME *Transactions*, 1944).

O fator de atrito na região laminar não sofre influência da rugosidade relativa da tubulação, como se pode observar no diagrama de Moody. O fator de atrito para escoamento laminar é inversamente proporcional ao número de Reynolds. A equação que expressa essa relação é dada por:

$$f = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad (15)$$

Para o escoamento turbulento em tubos lisos o fator de atrito depende apenas do número de Reynolds. Esta é a situação do limite inferior das curvas do diagrama de Moody.

No caso de escoamentos turbulentos em tubos rugosos, há de se considerar duas situações. Há uma zona de transição em que o fator de atrito depende de ambos,  $\text{Re}_D$  e  $\varepsilon/D$ . Já na região plenamente ou completamente turbulenta, o fator de atrito só depende da rugosidade relativa,  $\varepsilon/D$ , como indicado pelas curvas à direita do diagrama de Moody.

Entre as várias equações existentes, a equação de Churchill é a mais recomendada uma vez que ela é contínua e válida para as regiões laminar, de transição e turbulenta, isto é, reproduz todo o diagrama de Moody. Sua forma é:

$$f = 8 \left[ \left( \frac{8}{\text{Re}_D} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{1.5}} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (16)$$

sendo que,

$$A = \left\{ 2,457 \ln \left[ \frac{1}{\left( \frac{7}{\text{Re}_D} \right)^{0,9} + \left( \frac{0,27\varepsilon}{D} \right)} \right] \right\}^{16} \quad (17)$$

e

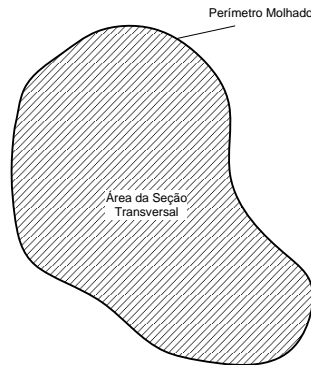
$$B = \left( \frac{37530}{\text{Re}_D} \right)^{16} \quad (18)$$

Para todas as análises feitas anteriormente foram considerados tubos de seção transversal circular com diâmetro  $D$ , mas, no caso de se ter condutos com seção transversal não circular é preciso utilizar o conceito de *diâmetro hidráulico*, dado por:



$$D_H = 4 \times \frac{\text{Área da Seção Transversal}}{\text{Perímetro Molhado}} \quad (19)$$

onde o perímetro molhado é o perímetro que envolve a seção transversal tomada pelo fluido, conforme pode ser visto na Figura 4.



**Figura 4** – Seção transversal e perímetro molhado.

Nesse caso, o número de Reynolds fica:

$$\text{Re}_{DH} = \frac{\rho V D_H}{\mu} \quad (20)$$

A Figura 5 mostra um diagrama para se determinar a rugosidade relativa ( $\epsilon/D$ ) em tubulações comerciais de diversos tipos de materiais.

### 1.2.2 Perdas de Carga Localizadas

A *perda de carga localizada* é aquela devida ao atrito do fluido na passagem por singularidades, ou seja, é a perda de carga do fluido quando passa por válvulas, bocais, curvas e outros componentes de um sistema que ofereçam resistência à passagem do fluido. A perda de carga distribuída ( $h_f$ ) é determinada não mais pelo termo de atrito de Darcy-Weisbach ( $f$ ), mas sim por uma constante,  $C$ , que multiplica a energia cinética específica do fluido, isto é:

$$h_f = C \frac{V^2}{2g} \quad (21)$$

O coeficiente de perda de carga localizada ( $C$ ) é determinado de forma empírica para cada tipo de singularidade e seu valor é normalmente tabelado (ver Tabela 1).

### 1.2.3 Perda de Carga Total

Uma vez que se determinou as perdas de carga distribuídas (Seção 1.2.1) e as perdas de carga localizadas (Seção 1.2.2) pode se obter a perda de carga total do sistema por:

$$h_{f\ Total} = \sum h_{f\ distribuída} + h_{f\ localizada} \quad (22)$$

A Figura 5 mostra o diagrama de rugosidade relativa em tubulações de diversos materiais e a Tabela 1 mostra os resultados de perdas de carga obtidos empiricamente para diversas singularidades.

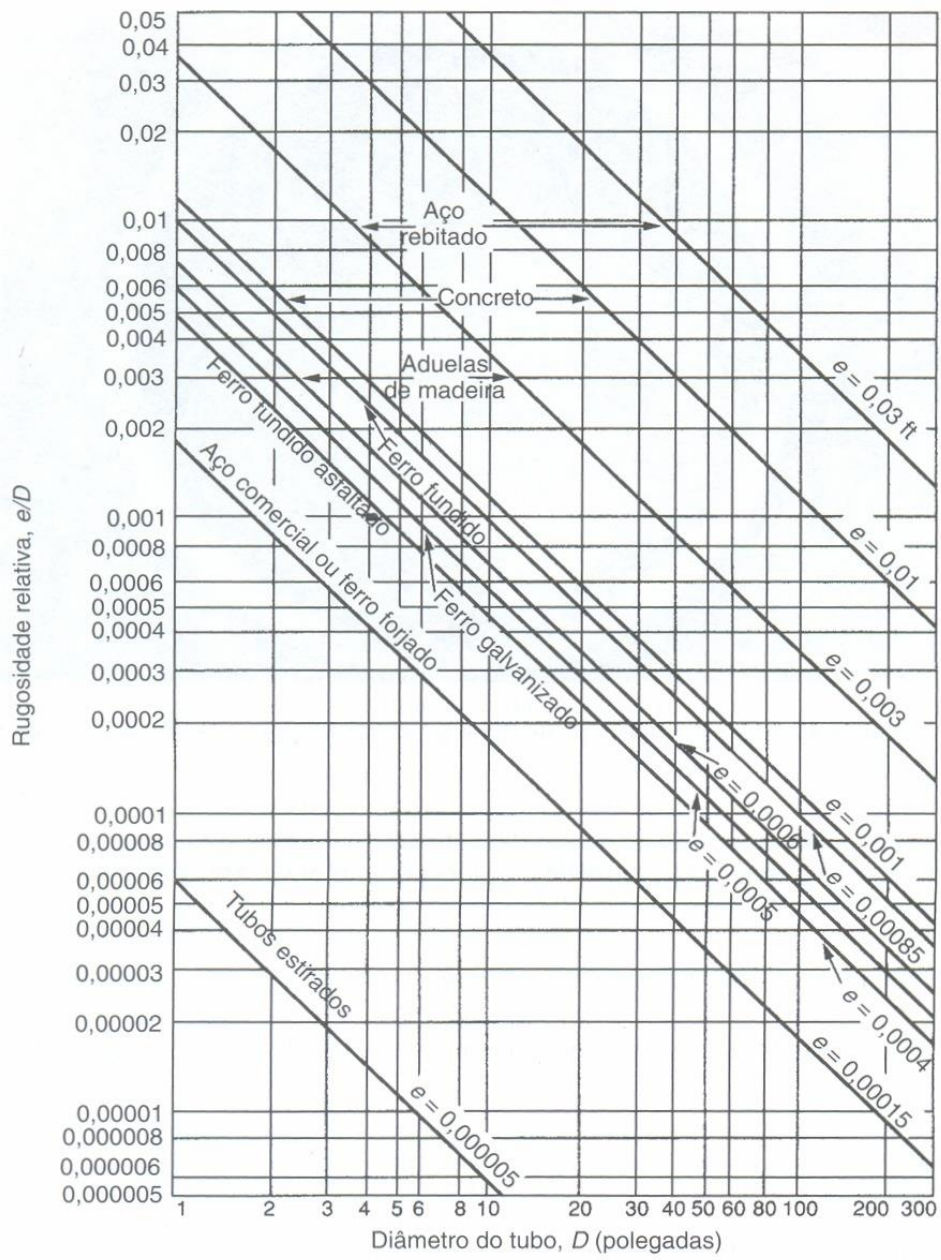


Figura 5 – Diagrama de rugosidade relativa em tubulações (Fox e McDonalds, 1992).

**Tabela 1** – Tabela de perda de carga em singularidades.

Tipo de Singularidade	C
Cotovelo 45°, padrão	0,35
Cotovelo 45°, raio longo	0,2
Cotovelo 90°, padrão	0,75
Cotovelo 90°, raio longo	0,45
Tee padrão	0,4
União	0,04
Válvula gaveta, totalmente aberta	0,17
Válvula gaveta, 3/4 aberta	0,9
Válvula gaveta, 1/2 aberta	4,5
Válvula gaveta, 1/4 aberta	24,0
Válvula de diafragma, totalmente aberta	2,3
Válvula de diafragma, 3/4 aberta	2,6
Válvula de diafragma, 1/2 aberta	4,3
Válvula de diafragma, 1/4 aberta	21,0
Válvula globo, totalmente aberta	6,4
Válvula globo, 1/2 aberta	9,5
Válvula borboleta, $\theta = 5^\circ$	0,24
Válvula borboleta, $\theta = 10^\circ$	0,52
Válvula borboleta, $\theta = 20^\circ$	1,54
Válvula borboleta, $\theta = 40^\circ$	10,8
Válvula borboleta, $\theta = 60^\circ$	118,0
Entrada de tubos reentrante	0,78
Entrada de tubos com quinas vivas	0,5
Entradas de tubos arredondadas	0,28 para $r/D$ até 0,02
$r$ = raio de curvatura da entrada	0,15 para $r/D$ até 0,06
$D$ = Diâmetro interno do tubo	0,04 para $r/D > 0,15$
Saída de tubos	1,0
	0,05 para $\theta = 10^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,5$
	0,12 para $\theta = 45^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,5$
Reduções	0,05 para $\theta = 10^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,25$
$\theta$ = semi-ângulo	0,17 para $\theta = 45^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,25$
	0,26 para $\theta = 90^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,5$
	0,41 para $\theta = 90^\circ$ e $A_{MENOR}/A_{MAIOR} = 0,25$

Fonte: . Moody, "Friction Factors for Pipe Flow", ASME *Transactions*, 1944.

Outras fontes de dados de coeficientes de perdas de carga localizadas é o *Engineering Data Book*, do Hydraulic Institute.

É possível escrever a equação da energia entre dois pontos distintos de um sistema de tubulações, considerando-se todos os componentes existentes entre eles. A equação da energia, nesse caso, fica:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \sum_{i=1}^I \frac{W_{Si}}{g} + \sum_{k=1}^K \frac{h_{fk}}{g} + \sum_{l=1}^L \frac{h_{fl}}{g} \quad (23)$$

A relação entre a perda de carga e a redução da pressão é dada por:

$$\Delta P = \rho h_f \quad (24)$$

E a relação entre potência e perda de carga é dada por:

$$\text{Potência} = Q\Delta P = \rho Q h_f = \dot{m} h_f \quad (25)$$

### Exemplo de aplicação:

Escreva a equação da energia para o sistema de reservatórios e tubos, mostrado a seguir, e determine o diâmetro do tubo de aço comercial, mostrado na figura, para uma vazão  $Q = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ , dados:

$$D_1 = D_2 = D_3;$$

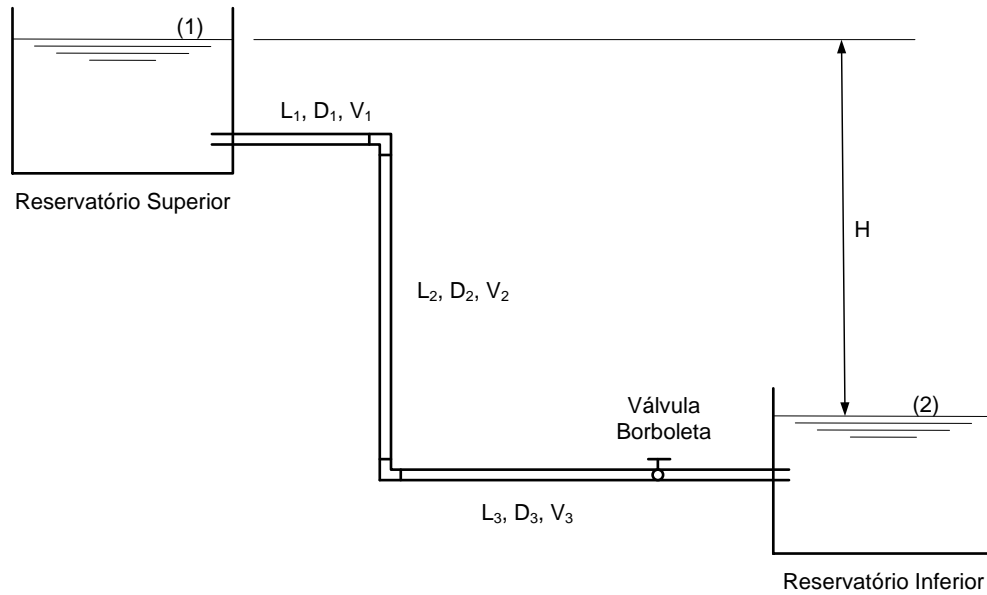
$$L_1 = 6 \text{ m};$$

$$L_2 = 24 \text{ m};$$

$$L_3 = 30 \text{ m};$$

$$H = 25 \text{ m}.$$

Fluido: Água

Solução:

Antes de qualquer coisa, é preciso estabelecer os dois pontos a serem considerados para a aplicação da equação da energia. Neste caso, os pontos serão:

Ponto 1: A superfície livre da água no reservatório superior

Ponto 2: A superfície livre da água no reservatório inferior

Assim, a equação da energia para os pontos considerados fica:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \underbrace{C_E \frac{V_1^2}{2g}}_{\text{Entrada do tubo}} + \underbrace{f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}}_{\text{Tubo 1}} + \underbrace{C_C \frac{V_2^2}{2g}}_{\text{Cotovelo}} + \underbrace{f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}}_{\text{Tubo 2}} + \underbrace{C_C \frac{V_3^2}{2g}}_{\text{Cotovelo}} + \underbrace{f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}}_{\text{Tubo 3}} + \underbrace{C_V \frac{V_3^2}{2g}}_{\text{Válvula Gaveta}} + \underbrace{C_S \frac{V_3^2}{2g}}_{\text{Saída do tubo}}$$

Analisando-se o sistema, podemos escrever:

$$P_1 = P_2$$

$$V_1 = V_2 = 0$$

$$H = z_1 - z_2$$

E da equação da continuidade para um escoamento permanente incompressível, vem:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = V_3 A_3$$

Que, para tubos de seção transversal circular, fica:

$$V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 = V_3 D_3^2$$

Substituindo-se tudo na equação da energia, fica:

$$H = \frac{V^2}{2g} \left[ C_E + \frac{f_1 L_1}{D_1} + \frac{D_1^4}{D_2^4} \left( C_C + \frac{f_2 L_2}{D_2} \right) + \frac{D_1^4}{D_3^4} \left( C_C + \frac{f_3 L_3}{D_3} + C_V + C_S \right) \right]$$

Esta é, então, a equação da energia para o sistema dado.

Agora, vamos aplicar os dados fornecidos à equação da energia. Então, para as perdas de carga localizadas, temos que:

$$\text{Entrada de tubo: } C_E = 0,78$$

$$\text{Cotovelos } 90^\circ : C_C = 0,75$$

$$\text{Válvula gaveta (totalmente aberta): } C_V = 0,17$$

$$\text{Saída de tubo: } C_S = 1,0$$

O tubo de aço comercial possui  $\varepsilon = 0,00015$ , conforme diagrama da Figura 5.

Aplicando-se todos os dados à equação da energia, vem:

$$25 = \frac{V^2}{2g} \left[ 0,78 + \frac{f}{D} (30 + 6 + 24) + 2 \times 0,75 + 0,17 + 1 \right]$$

Assim, temos:

$$25 = \frac{V^2}{2g} \left[ 60 \frac{f}{D} + 3,42 \right]$$

Mas,  $f$  depende de  $Re_D$  (para o caso geral), que pode ser escrito como função da vazão  $Q$ , da seguinte forma:

$$Re_D = \frac{4\rho Q}{\pi\mu D}$$

Então, podemos escrever a equação da energia da seguinte maneira:

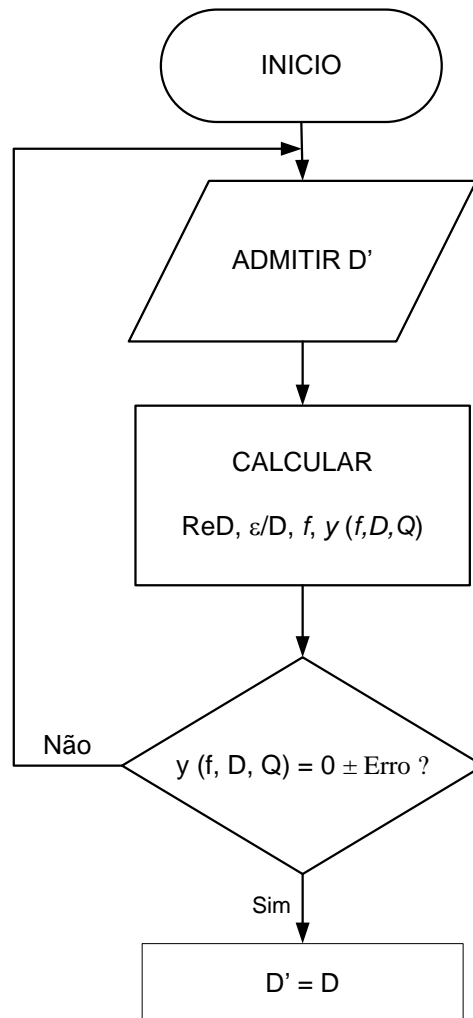
$$\frac{Q^2}{D^4 g} \left[ 60 \frac{f}{D} + 3,42 \right] - 30,81 = 0$$

Ou, também escrever da forma:

$$y(f, D, Q) = \frac{Q^2}{D^4 g} \left[ 60 \frac{f}{D} + 3,42 \right] - 30,81 = 0$$

A partir dessa expressão é possível, por meio de um método iterativo, determinar-se o diâmetro do tubo em função da vazão e do material escolhidos.

O processo iterativo pode ser mais bem compreendido com o fluxograma abaixo:





Aplicando-se o método descrito pelo fluxograma, temos:

Passo 1 - arbitrar um diâmetro inicial  $D^I$ ;

Passo 2 - calcular  $Re_{D^I}$ ,  $\varepsilon/D^I$  e calcular  $f^I$  pela Eq. De Churchill ou pelo Diagrama de Moody;

Passo 3 – verificar se atende à equação da energia, ou seja, se  $y(f,D,Q) = 0 \pm \text{Erro}$  (por exemplo, 0,01);

Passo 4 – Se atende, então,  $D^I = D$ ; caso contrário, atribuir ou diâmetro  $D^{II}$  e reiniciar o processo até atender à equação da energia.

Para esse problema, segundo o processo iterativo mostrado na tabela, temos que o diâmetro encontrado foi  $D = 0,2758$  m ou  $D = 1^{1/2}$ ”, para tubos comerciais.

$D$	$Re_D$	$\varepsilon/D$	$A$	$B$	$f$	$y(f,D,Q)$
0,1	63694267,5	0,00150	3,38E+20	2,11E-52	0,0217	4082,842
0,2	31847133,8	0,00075	1,31E+21	1,38E-47	0,0183	108,610
0,21	30330603,6	0,00071	1,43E+21	3,02E-47	0,0181	79,763
0,22	28951939,8	0,00068	1,56E+21	6,36E-47	0,0179	57,911
0,23	27693159,8	0,00065	1,69E+21	1,29E-46	0,0178	41,134
0,24	26539278,1	0,00063	1,83E+21	2,56E-46	0,0176	28,094
0,25	25477707,0	0,00060	1,97E+21	4,91E-46	0,0174	17,846
0,26	24497795,2	0,00058	2,12E+21	9,21E-46	0,0173	9,707
0,27	23590469,5	0,00056	2,26E+21	1,68E-45	0,0171	3,184
0,272	23417010,1	0,00055	2,30E+21	1,89E-45	0,0171	2,038
0,274	23246083,0	0,00055	2,33E+21	2,13E-45	0,0171	0,941
0,275	23161551,8	0,00055	2,34E+21	2,26E-45	0,0171	0,409
0,2752	23144719,3	0,00055	2,34E+21	2,28E-45	0,0171	0,304
0,2754	23127911,2	0,00054	2,35E+21	2,31E-45	0,0171	0,199
0,2756	23111127,5	0,00054	2,35E+21	2,34E-45	0,0170	0,095
0,2758	23094368,2	0,00054	2,35E+21	2,37E-45	0,0170	-0,009

**BIBLIOGRAFIA**

1. Analysis and Design of Energy Systems, B.K. Hodge, Robert P. Taylor, 3<sup>rd</sup> Edition, Prentice Hall Ed., 1999.
2. Introdução à Mecânica dos Fluidos, Robert W. Fox & Alan T. McDonald, 6a edição, 2006;
3. Mecânica dos Fluidos, Streeter, V. L., Wylie, E. B, Editora McGraw-Hill, 1998.