

Provinha 1 (Lista de exercícios sobre Corpos Rígidos) – 01/04/2020

4302306 – Mecânica II – 1º Semestre 2020 – IFUSP Noturno – Prof. Airton Deppman

GABARITO

Avisos:

- Entrega até dia 14/04/2020 às 23:59 por email para paula.matuoka@usp.br.
- Formatos aceitos: fotos de celular, páginas escaneadas, L^AT_EX... desde que o texto seja legível.
- São 10 questões valendo 1,0 ponto cada.
- Os exercícios extras valem 1,0 ponto e podem ajudar a nota final P_1 . **Dada a dificuldade da lista, considere 0,3 cada questão extra.**
- Após somar os pontos das 10 questões e dos exercícios extras, a nota final será $P_1 \leq 10,0$.

Questão 1:

Um *CubeSat* é um satélite de dimensões reduzidas que pode ser utilizado por empresas e universidades em aplicações espaciais pontuais e de curto prazo. É lançado em órbita próxima à Terra por foguetes ou a partir da Estação Espacial Internacional com o auxílio de braços mecânicos. Após seu tempo de vida útil, ele entra na atmosfera terrestre e se desintegra, não gerando lixo espacial.

Um módulo CubeSat corresponde a um cubo de 10 cm de aresta e 1kg de massa. Para pequenas correções de posicionamento, são utilizadas rodas de reação elétricas, que aplicam torque ao redor dos eixos de rotação do satélite na direção contrária ao deslocamento, restaurando sua orientação preferencial de trabalho sem gastar muita energia. Para tal, é essencial conhecer o tensor momento de inércia do satélite e identificar seus eixos principais.

Calcule o tensor momento de inércia de um CubeSat de aresta a , massa M e densidade uniforme, quando seu eixo de rotação:

- (a) coincide com uma das arestas;
- (b) passa pelo centro geomético do cubo e é paralelo a uma das arestas;
- (c) coincide com a diagonal do cubo.

Extra 1: Qual matriz de rotação que leva o cubo de (a) para (c) diretamente?



Figura 1: 1U CubeSat (Fonte: Wikipedia)

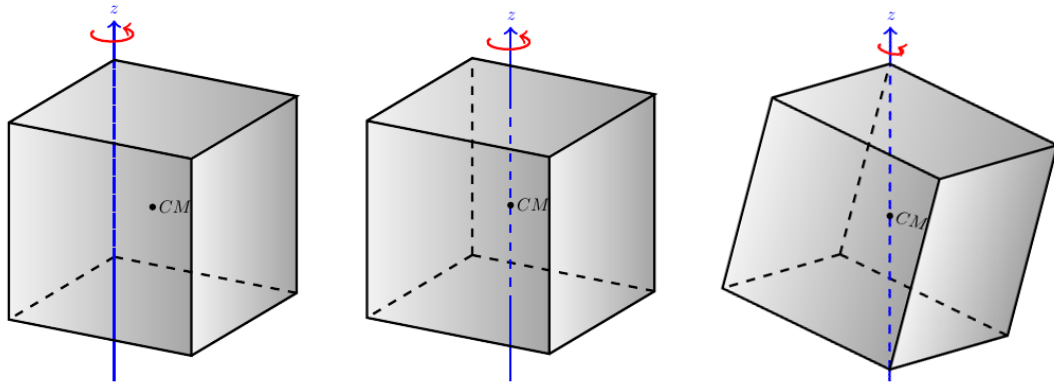


Figura 2: Questão 1; casos (a), (b) e (c).

Solução da Questão 1

Seja um cubo de aresta a , massa M e densidade volumétrica $\rho = M/V = M/a^3$.
Em coordenadas cartesianas, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $dV = dxdydz$.

(a) (Valor: 0,30)

Para o centro de coordenadas em um dos cantos, temos:

$$I_{xx} = \int_M \rho dm = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho(r^2 - x^2) dxdydz \quad (1)$$

$$= \rho a \int_0^a dy \int_0^a dz (y^2 + z^2) \quad (2)$$

$$= \rho a \int_0^a dy (y^2 a + \frac{a^3}{3}) \quad (3)$$

$$= \rho a (\frac{a^3}{3} a + \frac{a^3}{3} a) \quad (4)$$

$$= \frac{M}{a^3} a^5 (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \quad (5)$$

$$= \frac{2Ma^2}{3} \quad (6)$$

Por simetria, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

E:

$$I_{xy} = \int_M \rho dm = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho(-xy) dxdydz \quad (7)$$

$$= -\rho a \int_0^a dx \int_0^a dy xy \quad (8)$$

$$= -\rho a \int_0^a dx x \frac{a^2}{2} \quad (9)$$

$$= -\frac{M}{a^3} a \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} \quad (10)$$

$$= -\frac{Ma^2}{4} \quad (11)$$

Também por simetria, $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy}$.

Portanto:

$$I_{canto} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

e, girando ao redor do eixo z , $I = I_{zz} = \frac{2Ma^2}{3}$.

(b)(Valor: 0,30)

Centro das coordenadas no Centro de Massa com eixos paralelos aos lados do cubo. Podemos usar o Teorema dos Eixos paralelos:

$$I_{canto,ij} = I_{CM,ij} + M(d^2\delta_{ij} - d_i d_j) \implies I_{CM,ij} = I_{canto,ij} - M(d^2\delta_{ij} - d_i d_j) \quad (13)$$

onde $\vec{d} = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}$.

$$I_{CM,xx} = I_{canto,xx} - M(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 - d_x^2) \quad (14)$$

$$= \frac{2Ma^2}{3} - M(d_y^2 + d_z^2) \quad (15)$$

$$= \frac{2Ma^2}{3} - M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) \quad (16)$$

$$= Ma^2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \quad (17)$$

$$= Ma^2\left(\frac{4-3}{6}\right) \quad (18)$$

$$= \frac{Ma^2}{6} \quad (19)$$

Por simetria, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

$$I_{CM,xy} = I_{canto,xy} - M(-d_x d_y) \quad (20)$$

$$= -\frac{Ma^2}{4} + M\left(\frac{a}{2}\frac{a}{2}\right) \quad (21)$$

$$= -\frac{Ma^2}{4} + \frac{Ma^2}{4} \quad (22)$$

$$= 0 \quad (23)$$

Também por simetria, $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy}$.

Portanto:

$$\boxed{I_{centro} = \frac{Ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad (24)$$

e, girando ao redor do eixo z , $I = I_{zz} = \frac{Ma^2}{6}$.

(c)(Valor: 0,40)

Sendo o cubo um objeto centro-simétrico ($I_1 = I_2 = I_3$), qualquer eixo que passe pelo seu centro de massa é um eixo principal. Dessa forma, é invariante por rotação.

Suponha que λ seja a matriz de rotação que leva o sistema de coordenadas do caso (b) para o caso (c), em que a origem das coordenadas continua sendo o centro de massa.

$$I_{diag} = \lambda I_{centro} \lambda^{-1} \quad (25)$$

$$= \frac{Ma^2}{6} \lambda \mathbb{I} \lambda^{-1} \quad (26)$$

$$= \frac{Ma^2}{6} \lambda \lambda^{-1} \quad (27)$$

$$= \frac{Ma^2}{6} \mathbb{I} \quad (28)$$

$$= I_{centro} \quad (29)$$

Sendo assim, a resposta é igual à do item anterior:

$$I_{diag} = \frac{Ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

e, girando ao redor do eixo z , $I = I_{zz} = \frac{Ma^2}{6}$.

Questão 2:

Considere um cone sólido, reto, de densidade uniforme, massa M , raio da base R e altura H .

(a) Encontre o tensor momento de inércia para rotações ao redor do seu eixo de simetria.

(b) Encontre a velocidade angular do cone quando sua superfície lateral está apoiada e gira em uma superfície sem deslizar com o ápice O fixo e velocidade v no ponto P no centro de sua base circular.

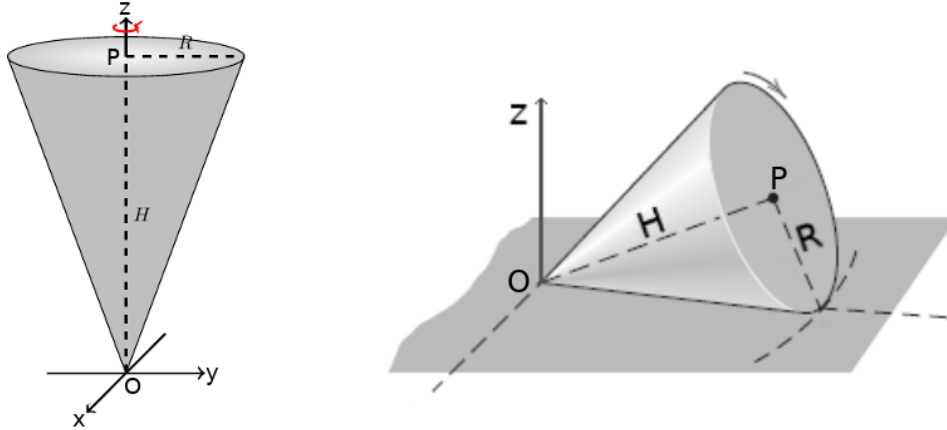


Figura 3: Questão 2: casos (a) e (b).

Solução da Questão 2

(a) (Valor: 0,50)

Cone reto de raio da base R e altura H , com massa M e densidade volumétrica ρ uniforme.

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} \quad (31)$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 H} \quad (32)$$

$$(33)$$

Usar coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

$$x = r \cos \theta \quad (34)$$

$$y = r \sin \theta \quad (35)$$

$$dV = r dr d\theta dz \quad (36)$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{H} = \frac{r}{z} \quad (37)$$

Limites de integração:

$$0 \leq r \leq z \tan \alpha \quad (38)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (39)$$

$$0 \leq z \leq H \quad (40)$$

$$I_{xx} = \int (r^2 - x^2) dm \quad (41)$$

$$= \int_V (z^2 + y^2) \rho dV \quad (42)$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^{z \tan \alpha} dr \cdot r (z^2 + r^2 \sin^2 \theta) \quad (43)$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \cdot z^4 \left(\tan^2 \alpha + \frac{1}{4} \tan^4 \alpha \sin^2 \theta \right) \quad (44)$$

$$= \rho \frac{H^5}{5} \left(\tan^2 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{4} \tan^4 \alpha \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \quad (45)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) d\theta \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \quad (47)$$

$$= \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \cos u d\theta \quad (48)$$

$$= \pi - \frac{1}{4} \sin u \Big|_0^{4\pi} \quad (49)$$

$$= \pi \quad (50)$$

Logo:

$$I_{xx} = \rho \frac{H^5}{5} \left[\tan^2 \alpha 2\pi + \frac{1}{4} \tan^4 \alpha \pi \right] \quad (51)$$

$$= \frac{3M}{\pi R^2 H} \cdot \frac{H^5}{5} \left(2\pi \cdot \frac{R^2}{H^2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{H^4} \right) \quad \boxed{I_{xx} = \frac{3}{5} M \left(H^2 + \frac{1}{4} R^2 \right) = I_{yy}} \quad (52)$$

$$I_{zz} = \int (r^2 - z^2) dm \quad (53)$$

$$= \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dV \quad (54)$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^{z \tan \alpha} dr \cdot r \cdot r^2 \quad (55)$$

$$= \frac{3M}{\pi R^2 H} \cdot 2\pi \cdot \int_0^H dz \frac{z^4}{4} \tan^4 \alpha \quad (56)$$

$$= \frac{3M}{\pi R^2 H} \cdot 2\pi \cdot \frac{H^5}{20} \frac{R^4}{H^4} \quad \boxed{I_{zz} = \frac{3}{10} MR^2} \quad (57)$$

Para os outros casos, $I_{ij} = 0, \forall i \neq j$, pois a integração em θ é nula:

$$I_{xy} = I_{yx} \propto \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (58)$$

$$I_{xz} = I_{zx} \propto \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (59)$$

$$I_{yz} = I_{zy} \propto \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (60)$$

Logo, os momentos de inércia do cone são:

$$\boxed{I = \frac{3}{5} MR^2 \begin{bmatrix} \frac{H^2}{R^2} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{R^2} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \quad (61)$$

(b)(Valor: 0,50)

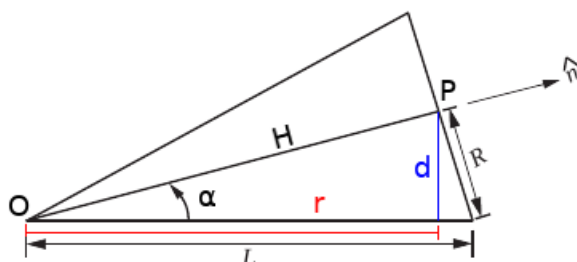


Figura 4: Cone.

O primeiro passo é definir os referenciais, todos com a mesma origem.

- R1: Referencial do laboratório XYZ , fixo.
- R2: Referencial que gira ao redor de Z no sentido anti-horário, $x'y'z'$, $z' \equiv Z$.

No R2, cone gira ao redor de seu eixo de simetria (que está na direção \hat{n}).
Pela geometria do problema, definimos o ângulo α :

$$\cos \alpha = \frac{H}{L} \quad \sin \alpha = \frac{R}{L} \quad (62)$$

E as distâncias:

$$d = R \cos \alpha \quad (63)$$

$$r = H \cos \alpha \quad (64)$$

$$L = \sqrt{H^2 + R^2} \quad (65)$$

A condição de girar sem escorregar implica em que a linha de contato entre o cone e os planos XY e $x'y'$ tem velocidade nula. Como o ponto P – que faz parte do eixo de simetria do cone – tem velocidade v vinda da rotação em torno de Z , podemos supor que sua projeção na linha de contato, P_c , tem velocidade nula.

Logo, o cone gira em torno de sua linha de contato para refletir a rotação. Nesse caso, o ponto P gira em torno do eixo y' com velocidade v e raio d .

$$\omega_P = \frac{v}{d} \quad (66)$$

$$= \frac{v}{R \cos \alpha} \quad (67)$$

$$= \frac{v}{R \cdot \frac{H}{L}} \quad \boxed{\omega_P = \frac{v\sqrt{H^2 + R^2}}{HR}} \quad (68)$$

Questão 3:

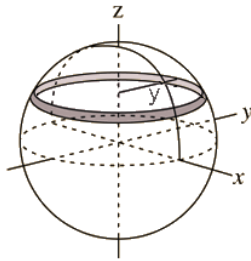
(a) Encontre o momento de inércia de uma casca esférica de raio r , densidade superficial uniforme e massa m , em torno de seu eixo de simetria.

(b) Encontre o momento de inércia de uma esfera sólida de raio r , densidade volumétrica uniforme e massa M em torno de seu eixo de simetria.

Solução da Questão 3

(a) (Valor: 0,50)

Casca esférica de raio R = soma de anéis de espessura $Rd\theta$ e raio $r = R \sin \theta$ – que também é a distância do eixo de rotação.



$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (69)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (70)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 - z^2 \quad (71)$$

$$dS = 2\pi r \sin \theta r d\theta = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (72)$$

$$\sigma = \frac{m}{4\pi r^2} \quad (73)$$

$$dm = \sigma dS \quad (74)$$

Figura 5: Casca esférica – anéis.

$$I = \int (r^2 - z^2) dm \quad (75)$$

$$= \int_S (r \sin \theta)^2 \sigma dS \quad (76)$$

$$= \int_0^\pi r^2 \sin^2 \theta \frac{m}{4\pi r^2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (77)$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (78)$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \quad (79)$$

$$= - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \quad (80)$$

$$= - \left[\cos \theta \Big|_0^\pi - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right] \quad (81)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6 - 4}{3} \quad (82)$$

$$= \frac{4}{3} \quad (83)$$

Logo:

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \frac{4}{3} \quad \boxed{I = \frac{2}{3} m r^2} \quad (84)$$

(b) (Valor: 0,50)

Esfera sólida de raio R = soma de cascas esféricas de raio $R \sin \theta$ – que também é a distância do eixo de rotação.

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (85)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (86)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 - z^2 \quad (87)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (88)$$

$$\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} \quad (89)$$

$$dm = \rho dV \quad (90)$$

$$I = \int (r^2 - z^2) dm \quad (91)$$

$$= \int_S (r \sin \theta)^2 \rho dV \quad (92)$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin^2 \theta \frac{3M}{4\pi R^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (93)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{M}{R^3} \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) \left(\int_0^R r^4 \right) \quad (94)$$

Do item (a) sabemos que:

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \quad (95)$$

Logo:

$$I = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{R^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} \quad \boxed{I = \frac{2}{5} MR^2} \quad (96)$$

Questão 4:

Encontre o momento de inércia no eixo de simetria dos seguintes casos:

(a) três massas idênticas m com hastes rígidas de massa desprezível formando um triângulo equilátero de lado l .

(b) uma placa na forma de um triângulo equilátero de lado l , densidade uniforme e massa M .

Extra 2: um *triângulo de Sierpinski* (estrutura fractal formada pelo processo recursivo de retirar de uma superfície triangular uma figura similar cuja altura é metade daquela da figura original) equilátero, de lado a , feito de material de densidade uniforme, e de massa M .



Figura 6: Formação do triângulo de Sierpinski.

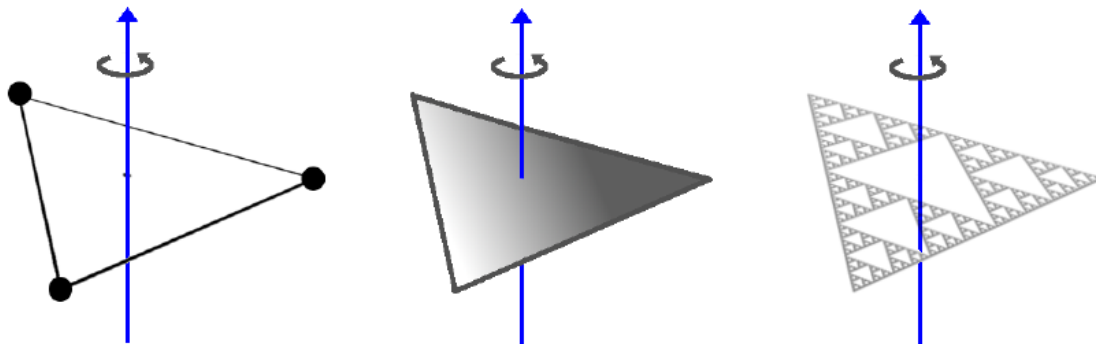


Figura 7: Questão 4: casos (a), (b) e Extra 2.

Solução da Questão 4

(a) **(Valor: 0,50)**

A distância entre cada uma das massas e o eixo de rotação (que também é o eixo de simetria) é:

$$r = \frac{2}{3}h \quad (97)$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad (98)$$

Logo:

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = 3 \cdot m \frac{4}{9} \cdot l^2 \cdot \frac{3}{4} \quad \boxed{I = ml^2} \quad (99)$$

(b) **(Valor: 0,50)**

Vamos usar o Teorema dos Eixos Paralelos para encontrar, primeiro, o momento de inércia do triângulo equilátero quando o eixo de rotação passa por O , e depois aquele quando o eixo de rotação passa por C , de acordo com a Figura 8.

Usando coordenadas cartesianas, temos:

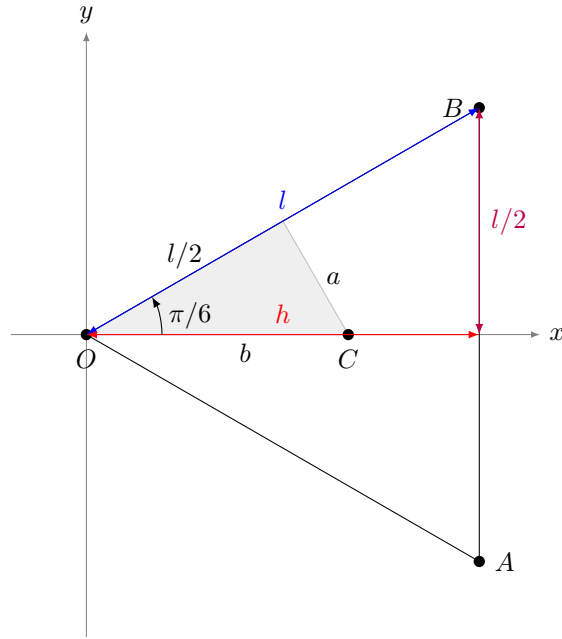


Figura 8: Triângulo equilátero com origem dos eixos O em um de seus vértices.

$$r = x^2 + y^2 \quad (100)$$

$$h = l \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (101)$$

$$dS = dx \cdot dy \quad (102)$$

Limites de integração:

$$0 \leq x \leq h \quad (103)$$

$$-\frac{l}{2h}x \leq y \leq +\frac{l}{2h}x \quad (104)$$

Densidade superficial uniforme (em função de h):

$$A = \frac{l \cdot h}{2} \quad (105)$$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{2M}{lh} \quad (106)$$

$$I_O = \int_O r^2 dm \quad (107)$$

$$= \int_{-\frac{l}{2h}x}^{+\frac{l}{2h}x} \int_0^h \sigma(x^2 + r^2) dx dy \quad (108)$$

$$= \sigma \int_0^h \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{l}{2h}x}^{+\frac{l}{2h}x} \quad (109)$$

$$= 2\sigma \int_0^h \left(\frac{l}{2h} \cdot x^3 + \frac{l^3}{8 \cdot 3 \cdot h^3} \cdot x^3 \right) dx \quad (110)$$

$$= 2\sigma \left(\frac{l}{2h} \frac{h^4}{4} + \frac{l^3}{24h^3} \frac{h^4}{4} \right) \quad (111)$$

$$= 2 \cdot \frac{2M}{lh} \left(\frac{lh^3}{8} + \frac{l^3}{96} \right) \quad (112)$$

$$= M \left(\frac{h^2}{2} + \frac{l^2}{24} \right) \quad (113)$$

Pelo Teorema dos Eixos Paralelos, temos que:

$$I_O = I_C + Mb^2 \quad (114)$$

$$I_C = I_O - Mb^2 \quad (115)$$

onde b é a distância entre O e C . Usando condições de simetria, temos:

$$a + b = h \quad (116)$$

$$a = h - b \quad (117)$$

e

$$\frac{a}{b} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (118)$$

$$a = \frac{b}{2} \quad (119)$$

Logo:

$$h - b = \frac{b}{2} \quad (120)$$

$$h = \left(b + \frac{b}{2}\right) \quad (121)$$

$$\frac{3b}{2} = h \quad (122)$$

$$b = \frac{2}{3} \cdot h \quad (123)$$

Então:

$$I_C = I_O - Mb^2 \quad (124)$$

$$= M \left(\frac{h^2}{2} + \frac{l^2}{24} \right) - M \left(\frac{2}{3} \cdot h \right)^2 \quad (125)$$

$$= M \left[\frac{l^2}{24} + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{4h^2}{9} \right) \right] \quad (126)$$

$$= M \left[\frac{l^2}{24} h^2 \left(\frac{9-8}{18} \right) \right] \quad (127)$$

Agora, substituindo o valor de h :

$$I_C = M \left[\frac{l^2}{24} + \frac{1}{18} \left(l \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] \quad (128)$$

$$= M \left(\frac{l^2}{24} + \frac{1}{18} \frac{3l^2}{4} \right) \quad (129)$$

$$= M \left(\frac{l^2}{24} + \frac{l^2}{24} \right) \quad (130)$$

$$\therefore \boxed{I_C = \frac{Ml^2}{12}} \quad (131)$$

Questão 5:

Seja um objeto cujos momentos principais são $I_1 > I_2 > I_3$.

Para rotações ao redor dos eixos principais e sem dissipação de energia, discuta a estabilidade dos movimentos para pequenas perturbações.

Extra 3 Discuta o que aconteceu com o satélite *Explorer I* da NASA - que foi projetado para girar em torno de seu eixo de menor momento de inércia e acabou girando em torno do eixo de maior momento de inércia.

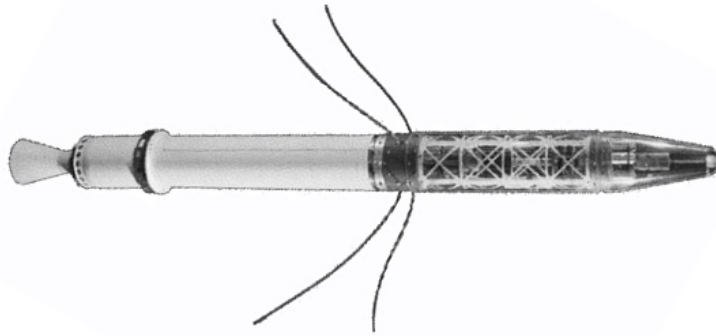


Figura 9: Explorer I (fonte: NASA).

Extra 4: Discuta o *Efeito Dzhanibekov* ou *Efeito da Raquete de Tênis* com base na estabilidade dos eixos principais.

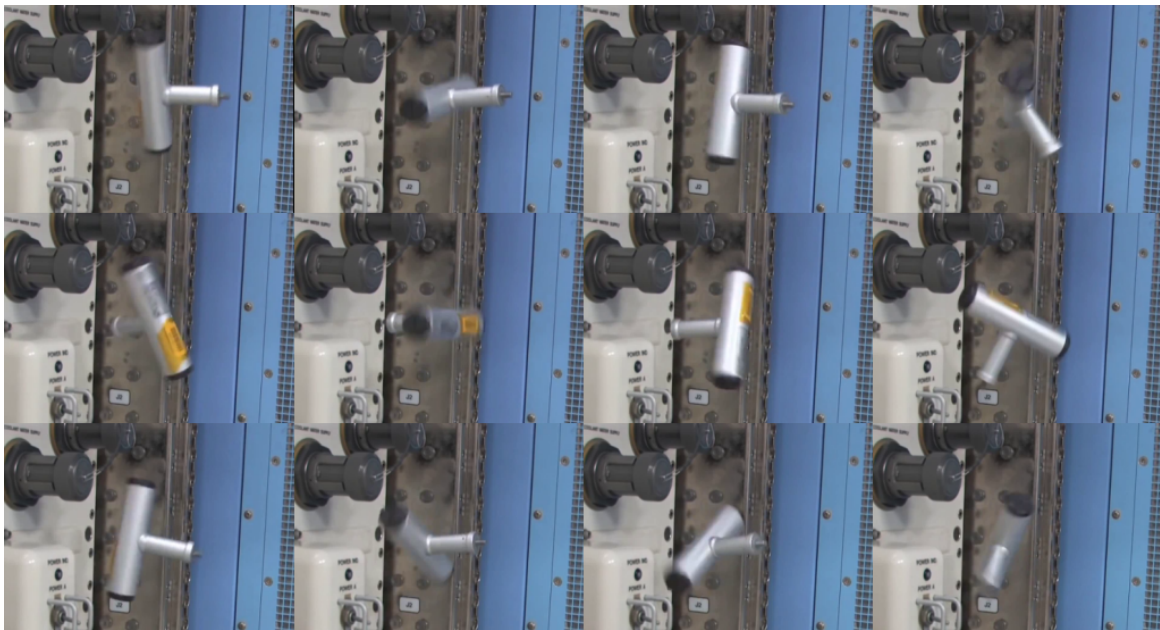


Figura 10: Efeito Dzhanibekov no espaço: fotos sequenciais - da esquerda para a direita, de cima a baixo - indicando a mudança de orientação de uma ferramenta em experimento realizado no espaço. Veja o vídeo: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dzhanibekov_effect.ogv

Extra 5: Discuta o *Efeito Rattleback* - que ocorre com alguns objetos que possuem uma direção preferencial de rotação.

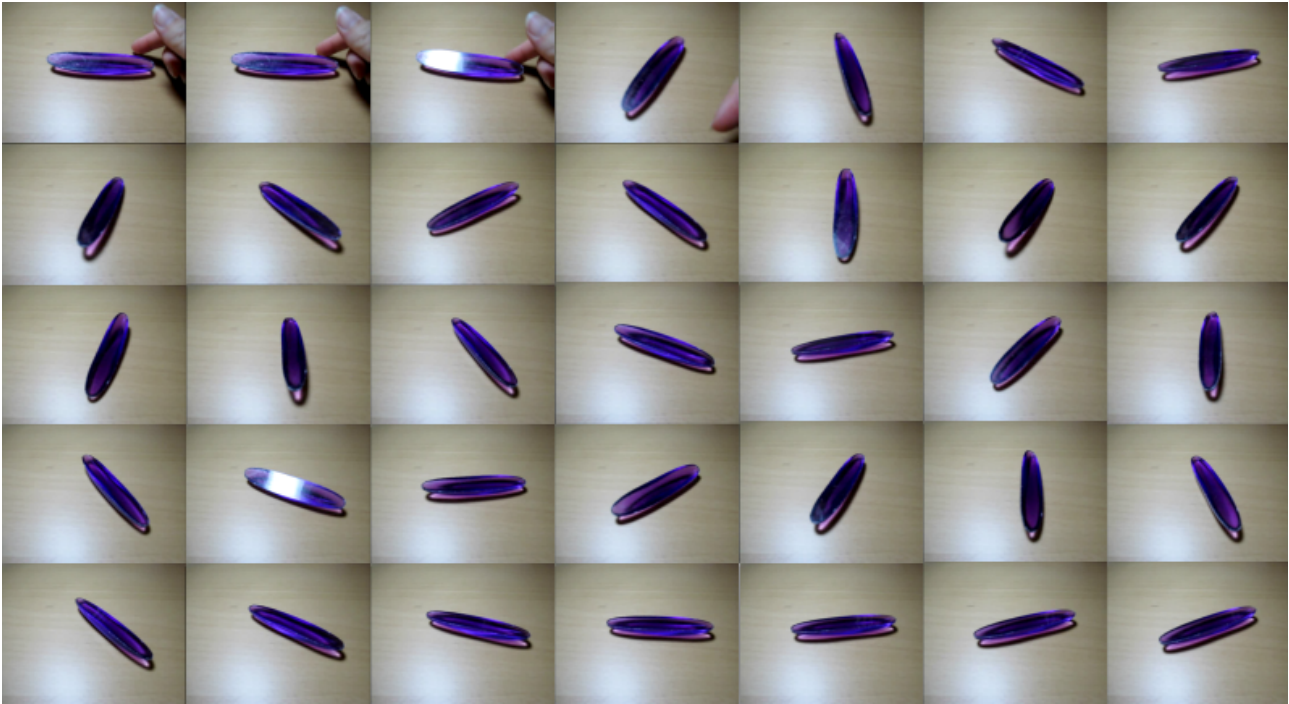


Figura 11: Efeito Rattleback: fotos sequenciais - da esquerda para a direita, de cima a baixo - de um objeto que, inicialmente, gira na direção horária e, em um certo ponto, passa a girar na direção anti-horária. Veja o vídeo: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rattleback_in_action.ogv

Solução da Questão 5

(Valor: 1,00)

Sejam $I_1 > I_2 > I_3$ os momentos de inércia dos eixos principais \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 .
As equações de Euler na ausência de torque são:

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = 0 \quad (132)$$

Logo:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \quad (133)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \quad (134)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \quad (135)$$

Vamos considerar, inicialmente, uma rotação próxima ao eixo principal \hat{e}_1 :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \delta_2 \hat{e}_2 + \delta_3 \hat{e}_3 \quad (136)$$

onde $\delta_2, \delta_3 \ll \omega_1$.

Mantendo apenas a primeira ordem de perturbação, temos:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \delta_2 \delta_3 (I_2 - I_3) = 0 \quad (137)$$

$$I_2 \dot{\delta}_2 = \delta_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \quad (138)$$

$$I_3 \dot{\delta}_3 = \omega_1 \delta_2 (I_1 - I_2) \quad (139)$$

Encontramos duas equações acopladas para δ_2, δ_3 :

$$\dot{\delta}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1 \delta_3 \quad (140)$$

$$\dot{\delta}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \delta_2 \quad (141)$$

Vamos encontrar a equação para δ_2 , derivando mais uma vez em relação ao tempo:

$$\ddot{\delta}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} (\omega_1 \delta_3 + \omega_1 \dot{\delta}_3) \quad (142)$$

$$= \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1 \dot{\delta}_3 \quad (143)$$

$$= \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1 \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \delta_2 \quad (144)$$

$$= \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1^2 \delta_2 \quad (145)$$

Chegamos a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem do tipo:

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 x(t) \quad (146)$$

cujas soluções dependem do sinal de α^2 :

- $\alpha^2 < 0$, $x(t) = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ – é uma função senoidal, que representam oscilações periódicas e limitadas.
- $\alpha^2 > 0$, $x(t) = A \exp(\alpha t) + B \exp(-\alpha t)$ é uma função exponencial, que representa instabilidade do movimento.

Devido à propriedade cíclica dos índices, podemos dizer que:

$$\alpha_1^2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1^2 \quad (147)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2^2 \quad (148)$$

$$\alpha_3^2 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3^2 \quad (149)$$

Para rotações próximas de \hat{e}_1 , portanto, temos:

$$\alpha_1^2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1^2 < 0 \quad (150)$$

pois, sendo $I_1 > I_2 > I_3$, $(I_3 - I_1) < 0$ e $(I_1 - I_2) > 0$.

Logo:

$$\delta_2 = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t) \quad (151)$$

Analogamente,

$$\delta_3 = C \cos(\alpha t) + D \sin(\alpha t) \quad (152)$$

Portanto, pequenas perturbações na rotação ao redor do eixo principal \hat{e}_1 são estáveis.

O mesmo ocorre para \hat{e}_3 :

$$\alpha_3^2 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3^2 < 0 \quad (153)$$

pois $(I_2 - I_3) > 0$ e $(I_3 - I_1) < 0$.

Mas, para \hat{e}_2 :

$$\alpha_2^2 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2^2 > 0 \quad (154)$$

pois $(I_1 - I_2) > 0$ e $(I_2 - I_3) > 0$.

Isso implica que as perturbações são descritas por $\delta(t) = A \exp(\alpha t) + B \exp(-\alpha t)$, indicando instabilidade.

Portanto, para $I_1 > I_2 > I_3$, as rotações ao redor dos eixos principais menor e maior são estáveis para pequenas perturbações, enquanto que a rotação ao redor do eixo principal intermediário é instável.

Questão 6:

Encontre a Lagrangeana e as equações do movimento de um pêndulo duplo nas seguintes condições:

- (a) Pêndulo duplo formado por duas hastes rígidas de comprimento l_1 e l_2 de massas desprezíveis e duas massas m_1 e m_2 em suas respectivas extremidades
- (b) Pêndulo duplo de massa distribuída formado por duas chapas retangulares de comprimentos l_1 e l_2 de massas m_1 e m_2 uniformemente distribuídas unidas por um pivô.
- (c) Demonstre para quais condições o caso (b) se reduz ao caso (a).

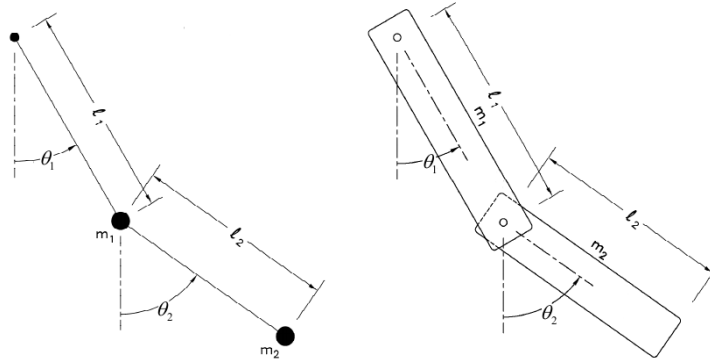


Figura 12: Questão 6, casos (a) e (b).

Solução da Questão 6

(a) (Valor: 0,50)

Para a m_1 , temos:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (155)$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (156)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (157)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (158)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \quad (159)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1)] \quad (160)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (161)$$

$$V_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (162)$$

Para a m_2 , temos:

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (163)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (164)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (165)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (166)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (167)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2] \quad (168)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ l_2^2 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \quad (170)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (171)$$

$$V_2 = -m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (172)$$

Logo, a Lagrangeana é dada por:

$$V = V_1 + V_2 \quad (173)$$

$$= -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (174)$$

$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (175)$$

$$T = T_1 + T_2 \quad (176)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (177)$$

$$L = T - V \quad (178)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (179)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (180)$$

São duas coordenadas: θ_1 e θ_2 .

Para θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \quad (181)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (182)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (183)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (184)$$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] +$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (185)$$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (186)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin \theta_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (187)$$

Para θ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \quad (188)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_1^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (189)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (190)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (191)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (192)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (193)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2} \sin \theta_1 - \frac{l_1}{l_2} [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (194)$$

As equações do movimento, portanto, são:

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin \theta_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (195)$$

e

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2} \sin \theta_1 - \frac{l_1}{l_2} [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (196)$$

As equações encontradas são acopladas e não podem ser resolvidas analiticamente, apenas por métodos numéricos.

(b) **(Valor: 0,50)**

Para o caso em que as massas são distribuídas, vamos usar as coordenadas do centro de massa das duas chapas.

Seja $\vec{R}_1(R_{1,x}, R_{1,y})$ a posição do centro de massa da primeira chapa em relação ao pivô P_1 .

Logo:

$$R_1 = \frac{l_1}{2} \quad (197)$$

$$R_{1,x} = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \quad (198)$$

$$R_{1,y} = -\frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \quad (199)$$

Seja \vec{R}_2 a posição do centro de massa da segunda chapa em relação ao pivô P_2 .

$$R_2 = \frac{l_2}{2} \quad (200)$$

$$R_{2,x} = \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \quad (201)$$

$$R_{2,y} = -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (202)$$

Seja $\vec{R}_P = (R_{P,x}, R_{P,y}) = (l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1)$ a posição do pivô P_2 em relação a P_1 .

Assim, as posições dos centros de massa em relação ao referencial do laboratório são dadas por:

$$X_1 = R_{1,x} = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \quad (203)$$

$$Y_1 = R_{1,y} = -\frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \quad (204)$$

$$X_2 = R_{P,x} + R_{2,x} = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \quad (205)$$

$$Y_2 = R_{P,y} + R_{2,y} = -l_1 \cos \theta_1 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (206)$$

A primeira derivada temporal:

$$\dot{X}_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (207)$$

$$\dot{Y}_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (208)$$

$$\dot{X}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (209)$$

$$\dot{Y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (210)$$

Elevando ao quadrado:

$$\dot{X}_1^2 = \frac{l_1^2}{4} \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (211)$$

$$\dot{Y}_1^2 = \frac{l_1^2}{4} \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (212)$$

$$\dot{X}_2^2 = l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (213)$$

$$\dot{Y}_2^2 = l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (214)$$

Agora, vamos calcular os termos da Lagrangeana:

$$V_1 = m_1 g Y_1 = -g \frac{m_1 l_1}{2} \cos \theta_1 \quad (215)$$

$$V_2 = m_2 g Y_2 = -g m_2 l_1 \cos \theta_1 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (216)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (217)$$

$$= -g m_1 \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 - g m_2 l_1 \cos \theta_1 - g m_2 \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (218)$$

$$= -\frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) g l_1 \cos \theta_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (219)$$

Para o cálculo da energia cinética, temos que calcular o momento de inércia I_{zz} de cada chapa ao redor de seu centro de massa.

Seja uma chapa retangular de comprimento l , espessura 2ε , massa M , área $S = 2\varepsilon l$ e densidade superficial σ uniforme. Em coordenadas cartesianas, temos:

$$I_{CM,zz} = \int_M r^2 dm \quad (220)$$

$$= \int_S \sigma r^2 ds \quad (221)$$

$$= \sigma \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \int_{-l/2}^{l/2} dx (x^2 + y^2) \quad (222)$$

$$= \sigma \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \left(\frac{x^3}{3} y + y^2 x \right) \Big|_{-l/2}^{l/2} \quad (223)$$

$$= \frac{M}{2\varepsilon l} \left(\frac{2l^3}{3} y + l \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \quad (224)$$

$$= \frac{M}{2\varepsilon l} \left(\frac{l^3 2\varepsilon}{12} + l \frac{2}{3} \varepsilon^3 \right) \quad (225)$$

$$= M \left(\frac{l^2}{12} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \right) \quad (226)$$

$$(227)$$

Se $\varepsilon \ll l$, podemos utilizar $I_{CM,zz} = \frac{1}{12} M l^2$.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + \frac{1}{2} I_{1,CM} \dot{\theta}_1^2 \quad (228)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{l_1^2}{4} \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_1^2}{4} \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{1}{24} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (229)$$

$$= \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (230)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + \frac{1}{2} I_{2,CM} \dot{\theta}_2^2 \quad (231)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \right. \quad (232)$$

$$\left. + \frac{l_2^2}{4} \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (233)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{8} m_2 l_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \quad (234)$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (235)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{8} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (236)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (237)$$

$$T = T_1 + T_2 \quad (238)$$

$$= \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (239)$$

$$= \frac{1}{6} (m_1 + 3m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (240)$$

$$L = T - V \quad (241)$$

$$= \frac{1}{6} (m_1 + 3m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \quad (242)$$

$$+ \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) g l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (243)$$

São duas coordenadas: θ_1 e θ_2 .

Para θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)gl_1 \sin \theta_1 \quad (244)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \quad (245)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 \quad (246)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (247)$$

$$\frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + \quad (248)$$

$$+ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (249)$$

$$\frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (250)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3}{l_1^2(m_1 + 3m_2)} \left\{ -\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)gl_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2] \right\} \quad (251)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{3m_1 + 6m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 - \frac{3m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} [\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2] \quad (252)$$

Para θ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2 \quad (253)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{3}m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 \quad (254)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1] \quad (255)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (256)$$

$$\frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1] - \quad (257)$$

$$- \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (258)$$

$$\frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (259)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{3}{m_2l_2^2} \left\{ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2 \right\} \quad (260)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{3}{2} \frac{l_1}{l_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \frac{3}{2} \frac{l_1}{l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \frac{3}{2} \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 \quad (261)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{3}{2} \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{3}{2} \frac{l_1}{l_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2] \quad (262)$$

As equações do movimento, portanto, são:

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 = -\frac{3m_1 + 6m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 - \frac{3m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} [\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2]} \quad (263)$$

e

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{3}{2} \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{3}{2} \frac{l_1}{l_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2]} \quad (264)$$

As equações encontradas são acopladas e não podem ser resolvidas analiticamente, apenas por métodos numéricos.

(c) **(CANCELADA)**

Questão 7:

Seja um pêndulo plano – formado por uma haste de massa m_r e comprimento l presa ao teto em uma extremidade e acoplada a um disco de raio r e massa m_d . Calcule o período de oscilação quando:

- O disco está fixo à haste.
- O disco está livre para girar.

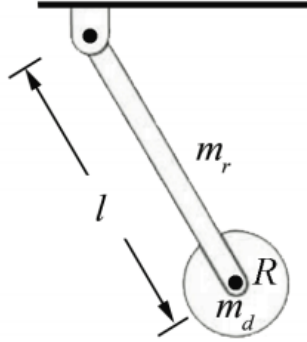


Figura 13: Questão 7, casos (a) e (b).

Solução da Questão 7

- (Valor: 0,50)**

Vamos calcular o momento de inércia no ponto de pivô do pêndulo, I_P :

$$I_P = (I_r)_P + (I_d)_P \quad (265)$$

onde I_r é o momento de inércia da haste de comprimento l e I_d é o momento de inércia do disco de raio R .

Para calcular o momento de inércia da haste, suponha que a mesma se encontra ao longo do eixo x com o pivô como centro das coordenadas cartesianas.

Seja $\lambda = m_r/l$ a densidade linear da haste. Logo:

$$(I_r)_P = I_{zz} = \int_M r^2 dm = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{m_r}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m_r l^2 \quad (266)$$

Para calcular o momento de inércia do disco fixo I_d , vamos usar o Teorema dos Eixos Paralelos:

Seja $\sigma = m_d/\pi R^2$ a densidade linear do disco. Logo, usando coordenadas cilíndricas:

$$(I_r)_P = I_{zz} + m_d l^2 \quad (267)$$

Então:

$$I_{zz} = \int_M dmr^2 = \int_S \sigma r^2 dS = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{m_d}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m_d R^2 \quad (268)$$

Logo:

$$(I_r)_P = \frac{1}{2} m_d R^2 + m_d l^2 \quad (269)$$

E:

$$I_P = \frac{1}{3} m_r l^2 + \frac{1}{2} m_d R^2 + m_d l^2 \quad (270)$$

A energia cinética de rotação é dada por:

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)\dot{\theta}^2 \quad (271)$$

O potencial é dado com respeito ao centro de massa dos dois corpos:

$$V = -m_rg\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right) - m_dgl\cos\theta = -\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl\cos\theta \quad (272)$$

Portanto, a lagrangeana do sistema é:

$$L = K - V \quad (273)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl\cos\theta \quad (274)$$

$$(275)$$

Para θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl\sin\theta \quad (276)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)\dot{\theta} \quad (277)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)\ddot{\theta} \quad (278)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = \left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl\sin\theta \quad (279)$$

Podemos considerar pequenas oscilações ($\theta \rightarrow 0 \implies \sin\theta \sim \theta$):

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl}{\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)} \cdot \theta \quad (280)$$

Trata-se de uma equação do tipo $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, onde:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl}{\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)}} \quad (281)$$

O período de oscilação é dado por:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + \frac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2\right)}{\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl}} \quad (282)$$

(b) **(Valor: 0,50)**

No caso em que o disco está livre, ele não realiza rotação ao redor de seu centro. Portanto:

$$I_P = \frac{1}{3}m_rl^2 + m_dl^2 \quad (283)$$

Analogamente ao item (a), temos, para pequenas oscilações:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}m_rl^2 + m_dl^2\right)}{\left(\frac{l}{2}m_r + m_d\right)gl}} \quad (284)$$

Questão 8:

(a) Encontre a Lagrangeana de um pêndulo de Foucault composto por uma massa m e um fio inextensivo de comprimento l situado no hemisfério norte a uma latitude λ .

(b) Qual período de precessão do pêndulo do caso (a) em função da latitude?

Extra 6: encontre as equações de movimento do pêndulo.

Solução da Questão 8

a) (**Valor: 0,50**)

No referencial do laboratório (do pêndulo), podemos considerar o regime de pequenas oscilações em θ :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l} \approx \theta \quad (285)$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (286)$$

A altura do pêndulo em relação ao solo z é:

$$z = l(1 - \cos \theta) \approx l \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{l\theta^2}{2} \quad (287)$$

O potencial gravitacional é:

$$V = mgz = mgl \frac{\theta^2}{2} = mgl \frac{x^2 + y^2}{2l^2} = mg \frac{x^2 + y^2}{2l} \quad (288)$$

Sabemos que $x^2 + y^2 = \theta^2 l^2$, logo $x, y \propto \theta l$, enquanto $z \propto \theta^2 l$. Assim, podemos desprezar a velocidade \dot{z} , pois $\dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y}$.

A velocidade do pêndulo é, portanto:

$$\vec{v}_P = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \approx \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (289)$$

A velocidade angular da Terra é $\vec{\Omega} = \Omega \hat{Z}$.

O versor \hat{Z} é dado pelas projeções nas direções \hat{x} e \hat{z} :

$$\hat{Z} = \cos(\pi/2 - \lambda)\hat{z} + \cos \lambda \hat{x} = \sin \lambda \hat{z} + \cos \lambda \hat{x} \quad (290)$$

Seja R_T o raio da terra: considerando o referencial da Terra - cuja origem está em seu centro - temos a posição do pêndulo \vec{D} , onde:

$$\vec{D} = (R_T + z)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y} \quad (291)$$

Logo, a velocidade do pêndulo em relação ao referencial da Terra é:

$$\vec{v}_T = \vec{\Omega} \times \vec{D} \quad (292)$$

$$= (\Omega \sin \lambda \hat{z} + \Omega \cos \lambda \hat{x}) \times [(R_T + z)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y}] \quad (293)$$

$$= \Omega \sin \lambda (x\hat{z} \times \hat{x} + y\hat{z} \times \hat{y}) + \Omega \cos \lambda [(R_T + z)\hat{x} \times \hat{z} + y\hat{x} \times \hat{y}] \quad (294)$$

$$= \Omega \sin \lambda (x\hat{y} - y\hat{x}) + \Omega \cos \lambda [-(R_T + z)\hat{y} + y\hat{z}] \quad (295)$$

$$= -\Omega \sin \lambda y\hat{x} + \Omega [\sin \lambda x - (R_T + z) \cos \lambda] \hat{y} + \Omega \cos \lambda \hat{z} \quad (296)$$

A velocidade absoluta, portanto é:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_T + \vec{v}_P \quad (297)$$

$$= -\Omega \sin \lambda y\hat{x} + \Omega [\sin \lambda x - (R_T + z) \cos \lambda] \hat{y} + \Omega \cos \lambda \hat{z} + \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (298)$$

$$= \hat{x}(-\Omega \sin \lambda y + \dot{x}) + \hat{y}\{\Omega [\sin \lambda x - (R_T + z) \cos \lambda] + \dot{y}\} + \Omega \cos \lambda \hat{z} \quad (299)$$

A energia cinética, portanto, é:

$$T = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (300)$$

$$= \frac{1}{2}m\{(\dot{x} - \Omega y \sin \lambda)^2 + \{\Omega[x \sin \lambda - (R_T + z) \cos \lambda] + \dot{y}\}^2 + \Omega^2 \cos^2 \lambda\} \quad (301)$$

$$= \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega^2 y^2 \sin^2 \lambda - 2\Omega y \dot{x} \sin \lambda + \Omega^2 \cos^2 \lambda + \quad (302)$$

$$+ 2\Omega \dot{y}[x \sin \lambda - (R_T + z) \cos \lambda] + \Omega^2[x \sin \lambda - (R_T + z) \cos \lambda]^2\} \quad (303)$$

$$= \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\Omega y \dot{x} \sin \lambda + \Omega^2 y^2 \sin^2 \lambda + \Omega^2 \cos^2 \lambda + 2\Omega x \dot{y} \sin \lambda - \quad (304)$$

$$- 2\Omega R_T \dot{y} \cos \lambda - 2\Omega z \dot{y} \cos \lambda + \Omega^2 x^2 \sin^2 \lambda + \Omega^2 (R_T^2 + 2R_T z + z^2) \cos^2 \lambda - \quad (305)$$

$$- 2\Omega^2 x R_T \sin \lambda \cos \lambda - 2\Omega^2 x z \sin \lambda \cos \lambda\} \quad (306)$$

Como $z \ll R_T$ e $\Omega \ll x, y$, podemos desprezar termos com $\Omega^2 x^2$, $\Omega^2 y^2$, Ωz e $\Omega^2 x z$. O resultado, portanto é:

$$T \approx \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\Omega y \dot{x} \sin \lambda + 2\Omega \dot{y}(x \sin \lambda - R_T \cos \lambda) - \Omega^2 x R_T \sin(2\lambda) + \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda\} \quad (307)$$

e

$$L = \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\Omega y \dot{x} \sin \lambda + 2\Omega \dot{y}(x \sin \lambda - R_T \cos \lambda) - \Omega^2 x R_T \sin(2\lambda)\} + \frac{1}{2}m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda - mg \frac{x^2 + y^2}{2l} \quad (308)$$

b) (Valor: 0,50)

Para x :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m2\Omega \dot{y} \sin \lambda - \frac{1}{2}R_T \Omega^2 \sin(2\lambda) - 2\frac{mgx}{2l} \quad (309)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m2\Omega y \sin \lambda \quad (310)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} - m\Omega \dot{y} \sin \lambda \quad (311)$$

$$(312)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (313)$$

$$\ddot{x} - \Omega \dot{y} \sin \lambda - \Omega \dot{y} \sin \lambda + \frac{1}{2}R_T \Omega^2 \sin(2\lambda) + \frac{gx}{l} = 0 \quad (314)$$

$$\ddot{x} - 2\Omega \dot{y} \sin \lambda + \frac{1}{2}R_T \Omega^2 \sin(2\lambda) + \frac{gx}{l} = 0 \quad (315)$$

Para y :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}m2\Omega \dot{x} \sin \lambda - 2\frac{mgy}{2l} \quad (316)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{1}{2}m2\Omega(x \sin \lambda - R_T \cos \lambda) \quad (317)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} + m\Omega \dot{x} \sin \lambda \quad (318)$$

$$(319)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (320)$$

$$m\ddot{y} + m\Omega\dot{x} \sin \lambda + \frac{1}{2}m2\Omega\dot{x} \sin \lambda + 2\frac{mgy}{2l} = 0 \quad (321)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} \sin \lambda + \frac{gy}{l} = 0 \quad (322)$$

Podemos usar $\tilde{x} = x - x_e$ na equação para x para eliminar os termos constantes:

$$\ddot{\tilde{x}} - 2\Omega\dot{y} \sin \lambda + \frac{g}{l}(\tilde{x} - x_e) = 0 \quad (323)$$

$$\ddot{\tilde{x}} - 2\Omega\dot{y} \sin \lambda + \frac{g}{l}\tilde{x} = 0 \quad (324)$$

quando

$$x_e = \frac{R_T\Omega^2 \sin(2\lambda)l}{2g} \quad (325)$$

Usando uma variável auxiliar $u = \tilde{x} - iy$, retiramos o acoplamento entre as equações e encontramos:

$$\ddot{u} + 2i\Omega\dot{u} \sin \lambda + \frac{gu}{l} = 0 \quad (326)$$

Fazendo $u(t) = U(t) \exp(irt)$, com $r = -\Omega \sin \lambda$, encontramos uma equação do tipo:

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (327)$$

com:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \Omega^2 \sin^2 \lambda - \Omega^2 \frac{R_T}{l} \cos^2 \lambda \quad (328)$$

Sendo $\Omega^2 \ll \Omega^2(R_T/l)$ e definindo $\omega_0^2 = g/l$,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \Omega^2 \frac{R_T}{l} \cos^2 \lambda \quad (329)$$

Período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2 \frac{R_T}{l} \cos^2 \lambda}} \quad (330)$$

Questão 9:

Considere uma moeda de raio R e massa uniforme m girando em uma superfície sem escorregar. Suponha que, após um certo tempo, a moeda oscile com inclinação θ em relação à superfície de apoio, e que seu centro de massa esteja em repouso.

- (a) Qual a velocidade angular ω da moeda?
 (b) Qual a frequência angular Ω do ponto de contato com a superfície?

Dica: na internet é possível encontrar vídeos sobre *Disco de Euler*, um disco de dimensões maiores que as da moeda, com modificações para minimizar o atrito, e que proporciona maior tempo de observação.

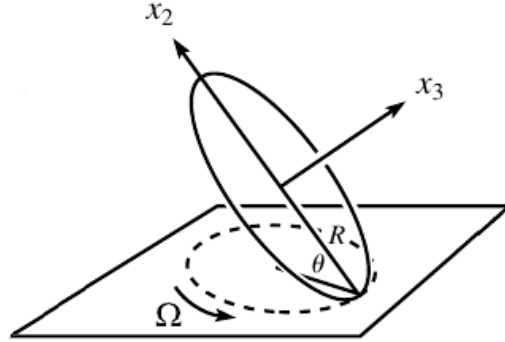


Figura 14: Questão 9: moeda oscilando.

Solução da Questão 9

- (a) **(Valor: 0,50)**

De acordo com a figura, temos 2 referenciais:

- Referencial do laboratório $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, no qual o CM está em repouso.
- Referencial da moeda $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ com centro no CM, que gira ao redor do eixo z com velocidade $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$, como ponto de contato PC em repouso.

A moeda gira ao redor de \hat{x}_3 com velocidade angular $\vec{\omega}_{PC,moeda} = \omega_{PC,moeda} \hat{x}_3$.

No referencial do laboratório, consideramos que:

- A velocidade angular de rotação do ponto de contato é $\omega_{moeda,Lab} = \Omega \hat{z}$ no CM.
- A velocidade angular de rotação do ponto de contato no referencial da moeda é $\vec{\omega}_{PC,moeda} = -\omega \hat{x}_3$.

Portanto, usando $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$:

$$\vec{\omega}_{PC,Lab} = \vec{\omega}_{PC,moeda} + \vec{\omega}_{moeda,Lab} \quad (331)$$

$$= -\omega_{PC,moeda} \hat{x}_3 + \Omega \hat{z} \quad (332)$$

$$= -\omega_{PC,moeda} \hat{x}_3 + \Omega (\cos \theta \hat{x}_3 + \sin \theta \hat{x}_2) \quad (333)$$

Para encontrar $\omega_{PC,moeda}$, usamos a condição de rotação sem escorregar e indicamos que a velocidade do PC deve ser a mesma nos dois referenciais:

$$\omega = \frac{v}{\text{raio}} \quad (334)$$

$$v = \omega \cdot \text{raio} \quad (335)$$

$$v_{PC,moeda} = \omega_{PC,moeda} \cdot R \quad (336)$$

$$v_{PC,Lab} = \omega_{PC,Lab} \cdot R \cos \theta \quad (337)$$

$$= \Omega R \cos \theta \quad (338)$$

$$v_{PC,moeda} = v_{PC,Lab} \quad (339)$$

$$\omega_{PC,moeda} \cdot R = \Omega R \cos \theta \quad (340)$$

$$\omega_{PC,moeda} = \Omega \cos \theta \quad (341)$$

Logo:

$$\vec{\omega}_{PC,Lab} = -\omega_{PC,moeda} \hat{x}_3 + \Omega(\cos \theta \hat{x}_3 + \sin \theta \hat{x}_2) \quad (342)$$

$$= -\Omega \cos \theta + \Omega(\cos \theta \hat{x}_3 + \sin \theta \hat{x}_2) \quad (343)$$

$$= \Omega \sin \theta \hat{x}_2 \quad (344)$$

$$\therefore \boxed{\vec{\omega}_{PC,Lab} = \Omega \sin \theta \hat{x}_2} \quad (345)$$

(b) **(Valor: 0,50)**

Para encontrar Ω , vamos utilizar as seguintes definições:

Torque:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{Lab} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{corpo} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (346)$$

Momento angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (347)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (348)$$

No ponto de contato, o torque é devido à força normal $\vec{N} = m_d g \hat{z}$ distante $\vec{r} = -R\hat{x}_2$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -R\hat{x}_2 \times \hat{z} m g \quad (349)$$

$$= -R m_d g \sin(\pi/2 - \theta) \quad (350)$$

$$= m_d g R \cos \theta \hat{x}_1 \quad (351)$$

$$= -m_d g R \cos \theta \hat{x} \quad (352)$$

Para encontrar o valor do momento angular \vec{L} , vamos calcular o momento de inércia $I = I_2$ lembrando que:

$$I_3 = \int_M dm r^2 = \int_S \sigma r^2 dS = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{m_d}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m_d R^2 \quad (353)$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2I_2 \quad (354)$$

$$I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_d R^2 = \frac{1}{4} m_d R^2 \quad (355)$$

Logo:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \frac{1}{4} m_d R^2 \cdot \Omega \sin \theta \hat{x}_2 \quad (356)$$

Quanto ao torque, temos:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{corpo} + \vec{\omega}_{Lab} \times \vec{L} \quad (357)$$

$$= 0 + \Omega(\hat{z} \times \hat{x}_2) \frac{1}{4} m_d R^2 \cdot \Omega \sin \theta \quad (358)$$

$$= \Omega^2 \frac{1}{4} m_d R^2 \sin \theta \sin(\pi/2 - \theta) \hat{x} \quad (359)$$

$$= \Omega^2 \frac{1}{4} m_d R^2 \sin \theta \cos \theta \hat{x} \quad (360)$$

Portanto, usando o módulo, temos:

$$|\vec{\tau}| = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| \quad (361)$$

$$\Omega^2 \frac{1}{4} m_d R^2 \sin \theta \cos \theta = m_d g R \cos \theta \quad (362)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g}{R \sin \theta}} \quad (363)$$

$$\therefore \boxed{\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R \sin \theta}}} \quad (364)$$

Questão 10:

(Goldstein, Cap. 5) Suponha que em um pião simétrico cada elemento de massa tem uma carga proporcional associada a ele de forma que a razão e/q é constante – o chamado *pião simétrico carregado*.

(a) Mostre que se, tal corpo gira em um campo magnético uniforme, sua Lagrangeana é dada por $L = T - \omega_l \cdot \mathbf{L}$.

(b) Mostre que T é constante (o que é decorrente da propriedade da Força de Lorentz de que um campo magnético não realiza trabalho em uma carga em movimento) e encontre outras constantes do movimento.

(c) Assumindo ω_l muito menor que a velocidade angular inicial ao redor do eixo de simetria do pião, obtenha a expressão para as frequências e amplitudes de nutação e precessão.

(d) Qual a origem das energias cinéticas de nutação e precessão?

Extra 7: o *Levitron* é um brinquedo conhecido como *pião magnético*, composto por um imã pequeno no formato de pião e um imã grande na forma de anel, sob uma plataforma de plástico ou madeira. Descreva o efeito da levitação magnética do brinquedo.



Figura 15: Levitron. Veja o vídeo: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Levitron-levitating-top-demonstrating-Roy-M-Harrigans-spin-stabilized-magnetic-levitation.ogv>

Solução da Questão 10

(a) (Valor: 0,25)

Sejam:

- Equações de Maxwell (CGI):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (365)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (366)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (367)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (368)$$

- Força de Lorentz:

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \quad (369)$$

Seja \vec{A} o potencial vetor definido da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \implies \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (370)$$

Então:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \quad (371)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (372)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (373)$$

A partir da ultima equação, podemos definir um potencial Φ como:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (374)$$

De onde obtemos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (375)$$

Portanto:

$$\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \quad (376)$$

Para o caso de uma partícula de carga q e massa m se movendo em um campo magnético uniforme B e na ausência de campo elétrico ($\vec{E} = 0$), temos:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (377)$$

Podemos calcular para a coordenada x :

$$(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_x = v_y (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z - v_z (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \quad (378)$$

$$= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (379)$$

$$= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad (380)$$

Sabendo que:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad (381)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (382)$$

Podemos substituir os termos correspondentes e encontrar:

$$(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dx} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (383)$$

Logo:

$$F_x = \frac{q}{c} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dx} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \quad (384)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \quad (385)$$

Comparando com a definição de Força Generalizada:

$$\mathbb{Q}_j = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (386)$$

Encontramos:

$$U = -\frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (387)$$

Então:

$$\mathbb{L} = T - U = T + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (388)$$

e para um sistema de partículas:

$$\mathbb{L} = T + \frac{q}{mc} [m_i \vec{v}_i \cdot \vec{A}_i(\vec{r}_i)] \quad (389)$$

Agora, vamos olhar o momento magnético M e o momento angular L desse sistema de partículas carregadas de cargas q_i em um campo magnético uniforme B :

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} q_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (390)$$

$$\vec{L} = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (391)$$

Logo:

$$\vec{M} = \Gamma \vec{L} \quad , \quad \Gamma = \frac{q}{2mc} \quad (392)$$

Γ é o fator giromagnético.

O torque τ é:

$$\tau = \vec{M} \times \vec{B} = \Gamma \vec{L} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (393)$$

Sabendo que para um campo magnético uniforme:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad (394)$$

A Lagrangeana, então, é:

$$\mathbb{L} = T + \frac{q}{mc} [m_i \vec{v}_i \cdot \vec{A}_i(\vec{r}_i)] \quad (395)$$

$$= T + \frac{q}{mc} \left[m_i \vec{v}_i \cdot \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}_i \right] \quad (396)$$

$$= T + \frac{q}{2mc} [m_i \vec{B} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)] \quad (397)$$

$$= T + \frac{q\vec{B}}{2mc} \cdot \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (398)$$

A frequência de Larmor é:

$$\vec{\omega}_l = \frac{q\vec{B}}{2mc} \quad (399)$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{L} = T - \vec{\omega}_l \cdot \vec{L}} \quad (400)$$

(b) **(Valor: 0,25)**

Podemos calcular a energia potencial através trabalho $W = \Delta T$ da Força de Lorentz (apenas o termo correspondente ao campo \vec{B}):

$$\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (401)$$

Em coordenadas cilíndricas $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$, $\vec{B} = B\hat{z}$, $\vec{v} = v\hat{\phi}$, $\vec{r} = r\hat{r}$. Então:

O trabalho W devido a um intervalo de tempo Δt é:

$$\Delta T = W \quad (402)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t) \quad (403)$$

$$= \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \Delta t \quad (404)$$

$$= \frac{q}{c} v^2 B (\hat{\phi} \times \hat{z}) \cdot \hat{\phi} \Delta t \quad (405)$$

$$= \frac{qv^2 B}{c} \Delta t (\hat{r} \cdot \hat{\phi}) \quad (406)$$

$$= 0 \quad (407)$$

Logo, a energia cinética T é constante.

Considerando os ângulos de Euler (θ, ϕ, ψ) e $I_2 = I_1$, vamos calcular explicitamente a Lagrangiana.

Seja:

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (408)$$

$$= (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (409)$$

$$(410)$$

Inicialmente, calculamos a componente L_z do momento angular do pião simétrico ($I_1 = I_2 \neq I_3$) carregado :

$$L_z = \vec{L} \cdot \hat{z} \quad (411)$$

$$= (I_1 \omega_1, I_1 \omega_2, I_3 \omega_3) \cdot (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta) \quad (412)$$

$$= I_1 (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \theta \sin \psi + I_1 (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \theta \cos \psi + \quad (413)$$

$$+ I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta \quad (414)$$

$$= I_1 (\dot{\phi} \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi} \cos \theta) \quad (415)$$

$$= \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} \cos \theta \quad (416)$$

A substituindo todos os termos na definição da Lagrangeana, temos:

$$\mathbb{L} = T - \vec{\omega}_l \cdot \vec{L} \quad (417)$$

$$= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - \omega_l \hat{z} \cdot \vec{L} \quad (418)$$

$$= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - \quad (419)$$

$$- \omega_l \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) - \omega_l \dot{\psi} \cos \theta \quad (420)$$

$$(421)$$

Como as coordenadas ϕ e ψ são cíclicas, seus momentos angulares são conservados:

$$p_\psi = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) - \omega_l I_3 \cos \theta = I_1 a \quad (422)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta - \omega_l (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) = I_1 b \quad (423)$$

(c) **(Valor: 0,25)**

Podemos encontrar uma relação entre as amplitudes a partir de:

$$I_1 a = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) - \omega_l I_3 \cos \theta = I_3 \omega_3 - \omega_l I_3 \cos \theta \quad (424)$$

$$\omega_3 = \frac{I_1 a}{I_3} \left(1 - \frac{I_3}{I_1 a} \omega_l \cos \theta \right) \quad (425)$$

$$|\omega_3| = \left| \frac{I_1 a}{I_3} \left| 1 - \left(\frac{I_3 \omega_l}{I_1 a} \right) \cos \theta \right| \right| \quad (426)$$

Podemos encontrar a expressão para $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ da seguinte forma:

$$I_1 a = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) - \omega_l \quad (427)$$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{I_1 a}{I_3} \right) - (\dot{\phi} - \omega_l) \cos \theta \quad (428)$$

$$I_1 b = \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta - \omega_l (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \quad (429)$$

$$= \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \left[\left(\frac{I_1 a}{I_3} \right) - (\dot{\phi} - \omega_l) \cos \theta \right] I_3 \cos \theta - \omega_l (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \quad (430)$$

$$= \dot{\phi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta - I_3 \cos^2 \theta) - \omega_l (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta - I_3 \cos^2 \theta) + I_1 a \cos \theta \quad (431)$$

$$(432)$$

$$I_1 \sin^2(\dot{\phi} - \omega_l) = I_1 b - I a \cos \theta \quad (433)$$

$$\dot{\phi} = \omega_l + \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (434)$$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{I_1 a}{I_3} \right) - (\dot{\phi} - \omega_l) \cos \theta \quad (435)$$

$$= \left(\frac{I_1 a}{I_3} \right) - \left(\omega_l + \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \omega_l \right) \cos \theta \quad (436)$$

$$= \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \left(\frac{b - a^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (437)$$

No caso de $\omega_l \ll \omega_3$

$$|\omega_3| = \left| \frac{I_1 a}{I_3} \right| \left| 1 - \left(\frac{I_3 \omega_l}{I_1 a} \right) \cos \theta \right| \approx \left| \frac{I_1 a}{I_3} \right| \quad (438)$$

$$a = \frac{I_3}{I_1} \omega_3 \quad (439)$$

onde a é a frequência de nutação.

A frequência de precessão é dada por:

$$\dot{\phi} = \omega_l + \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \approx \omega_l (1 - \cos at) \quad (440)$$

(d) **(Valor: 0,25)**

Dados momentos $p_\phi = I_1 b$ e $p_\psi = I_1 a$ são constantes do movimento, para haver conservação da energia cinética, a redução da velocidade de rotação do pião carregado implica em precessão e nutação. Veja a equação:

$$|\omega_3| = \left| \frac{I_1 a}{I_3} \right| \left| 1 - \left(\frac{I_3 \omega_l}{I_1 a} \right) \cos \theta \right| \quad (441)$$

Podemos perceber que, como $I_1 a$ deve ser conservado, a redução em ω_3 acarreta no aumento de θ – logo há precessão (devido ao torque que o campo B aplica ao pião) e nutação (devido a pequenas variações na posição do momento angular L do pião em relação ao seu eixo de simetria).