Mecânica Quântica II - 4302404

8ª lista

1) Considere o 4-vetor corrente elétrica como: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, onde ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica e $\vec{j}$ é o vetor densidade de corrente elétrica. Calcule a 4-divergência de j^μ, ou seja, calcule $\partial_\mu j^\mu$.

2) Partindo das matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que $\gamma^0\gamma^0 = 1$, $\gamma^i\gamma^i = -1$ e $\gamma^\alpha\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\alpha = 0$ para $\alpha \neq \lambda$.

3) Seja

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

onde $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$. Usando a normalização convencional para os espinores: $u^\dagger u = 2E/c$, mostre que

$$N = \sqrt{\frac{E+mc^2}{c}}.$$

4) As soluções para os espinores de Dirac são:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-c(p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{-E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{-E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{-E-mc^2} \\ \frac{-c(p_z)}{-E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$ e N está dado acima.

a) Mostre que $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ são ortogonais, ou seja, $u^{(1)\dagger}u^{(2)} = 0$.

b) Mostre que $u^{(3)}$ e $u^{(4)}$ são ortogonais.

c) $u^{(1)}$ e $u^{(3)}$ são ortogonais?

5) Se o eixo z aponta na direção do movimento mostre que

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+mc^2}{c}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{E-mc^2}{c}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e equivalentemente para os outros.

6) Mostre que, no limite não relativístico, as componentes de baixo (u_B) de $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ são menores do que as componentes de cima (u_A), por um fator v/c.