26/05/2020

(1)

Na aula passada, vimos que o campo eletromagnético faz parte de um tensor de rank 2, antissimétrico, chamado de tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a partir da lei de transformação p/ tensores de rank 2

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha} \Lambda^{\nu}_{\ \beta} F^{\alpha\beta} \qquad (S \longrightarrow S')$$

chegamos as seguintes leis de transformação p/ $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - v B_z) \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + v B_y) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right)$$

Também vimos que as eqs de movimento p/ uma partícula de carga q se movendo com velocidade v num campo eletromagnético podem ser escritas em formato covariante

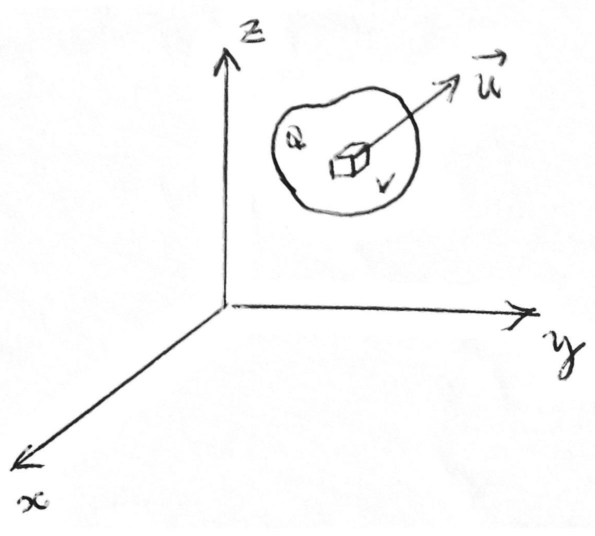
$$K^{\mu} \equiv \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = q\,\eta_{\nu} F^{\mu\nu}$$

Queremos agora estender o formalismo covariante e escrever as próprias equações de Maxwell nesse formalismo

Para isso, precisamos primeiramente incorporar os termos de fonte ρ e $\vec{J}$ em objetos com leis de transformação bem definidas.

Num dado referencial inercial, se a densidade local de carga é ρ e se move com velocidade $\vec{u}$, então

$$\vec{J} = \rho \vec{u}$$



onde

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

Nas duas eqs. anteriores, o único invariante é a carga Q contida no volume V.

A lei de transformação para V devido à contração de Lorentz na direção do movimento é

$$V = \sqrt{1 - u^2/c^2}\; V_0$$

onde V_0 é o volume ocupado por Q no referencial de repouso das cargas.

Então

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{Q}{V_0} = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

E portanto

$$\vec{J} = \rho \vec{u} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Fica claro então que é possível agrupar ρ e $\vec{J}$ num 4-vetor

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{quadricorrente}}}{J^\mu} = \rho_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quadrivelocidade}}}{\eta^\mu} = (c\rho, \vec{J})$$

Além de invariante por transformações de Lorentz, vimos que a carga elétrica é conservada localmente no eletromagnetismo e essa lei de conservação é expressa matematicamente pela eq. de continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

O lado esquerdo dessa equação fica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

Já o lado direito, a menos do sinal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0}$$

Portanto

$$\frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Usando $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$, temos

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} \Leftarrow$$ Eq. da continuidade em formato covariante

Perceba que para a última eq. $\partial_\mu J^\mu = 0$ ser consistente com nossas definições de índices co- e contravariantes, a 4-divergência ∂_μ deve ser um 4-vetor covariante.

Ou seja, sob mudança de referenciais $S \rightarrow S'$

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow \partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

(Provar!)

As eqs de Maxwell podem então ser escritas na forma covariante

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad \text{e} \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor dual a $F^{\mu\nu}$.

Lembre-se que definimos o 4-vetor a_μ dual ao 4-vetor a^μ como o operador linear no espaço dual cuja operação sobre a^μ era igual ao produto escalar de a^μ com ele mesmo.

$G^{\mu\nu}$ pode ser obtido a partir de $F^{\mu\nu}$ por meio das substituições

$$\frac{\vec{E}}{c} \longrightarrow \vec{B} \quad e \quad \vec{B} \longrightarrow -\frac{\vec{E}}{c}$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto também é um tensor de rank 2 antissimétrico.

Tome, por exempo $\mu = 0$ em $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03}$$

$$= \frac{\partial \cancel{F^{00}}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3}$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$= \mu_0 J^0 = \mu_0 c \rho \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\mu = 1$:

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \cancel{\frac{\partial F^{11}}{\partial x^1}}^{\,0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$= \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x = \mu_0 J^1 = \mu_0 J_x$$

De maneira similar:

$\mu = 2$: $$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_y = \mu_0 J_y$$

$\mu = 3$ $$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_z = \mu_0 J_z$$

Portanto

$$\partial_\nu F^{i\nu} \quad (i = 1,2,3) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

Prove que

$$\partial_\nu G^{0\nu} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

e

$$\partial_\nu G^{i\nu} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Podemos também introduzir um 4-potencial A^μ

$$A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

em termos do qual o tensor de campo é dado por

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$$

ou

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Por exemplo

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} V\right)_x}_{-\vec{E}} = \frac{E_x}{c}$$

e resultados similares p/ F^{02} e F^{03}.

$$F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = B_z$$

e ~~r~~esultados similares p/ F^{13} e F^{23}.

Em termos do 4-potencial A^μ, as eqs de Maxwell não-homogêneas

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

fica

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right) = \mu_0 J^\mu$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu$$

É possível simplificar estas eqs usando a invariância de calibre do Eletromagnetismo.

Vimos no bloco 2 do curso que transformações do tipo

$$\begin{cases} V \longrightarrow V' = V - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \end{cases}$$

transformação de calibre

onde λ é função escalar qquer dependente de $\vec{r}$ e t

$$\lambda = \lambda(\vec{r}, t),$$

mantém os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ inalterados

Em nossa notação covariante, uma transformação de calibre é expressa como

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} = A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

Em particular, no calibre de Lorentz, λ é escolhido de forma que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

ou em notação covariante

$$\partial_\nu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

Incluindo essa condição de volta na eq. não-homogênea

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\cancel{\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}}^{\,0} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial^\nu\partial_\nu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \Box^2 \quad \text{(D'Alembertiano)}$$

Portanto, temos finalmente

$$\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

Eqs de onda não-homogêneas

As eqs de Maxwell homogêneas

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \qquad (*)$$

não trazem nenhum vínculo adicional para 4-potencial A^μ. Para se dar conta disso, o primeiro passo é mostrar que $(*)$ é equivalente a

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \qquad \text{(Provar!)}$$

Cuidado com o fato de que na última eq., o tensor possui dois índices covariantes $(F_{\mu\nu})$ em contraste com $F^{\mu\nu}$ que possui 2 índices contravariantes.

A receita para obter $F_{\mu\nu}$ a partir de $F^{\mu\nu}$ é trocar o sinal do elemento de $F^{\mu\nu}$ toda vez que um dos índices (μ ou ν) é igual a 0. Então

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}$$

$$= \partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda)$$

$$= \cancel{\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu} - \cancel{\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu} + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda} - \cancel{\partial_\mu \partial_\lambda A_\nu} + \cancel{\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu A_\lambda}$$

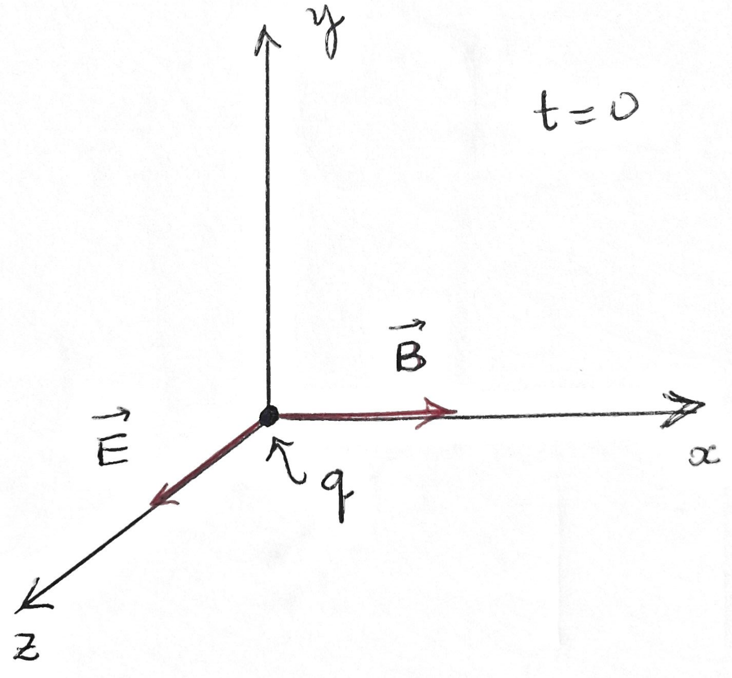
$$= 0$$

Exercício

Uma carga q é liberada a partir do repouso na origem de um sistema inercial onde há um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ e um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{x}$.

Determine a trajetória da partícula. Assuma que $E_0 < c B_0$.

Uma maneira de resolver esse problema é determinar a trajetória num referencial onde $\vec{E} = \vec{0}$ e transformar de volta para o referencial original



As leis de tranformação do campos são

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

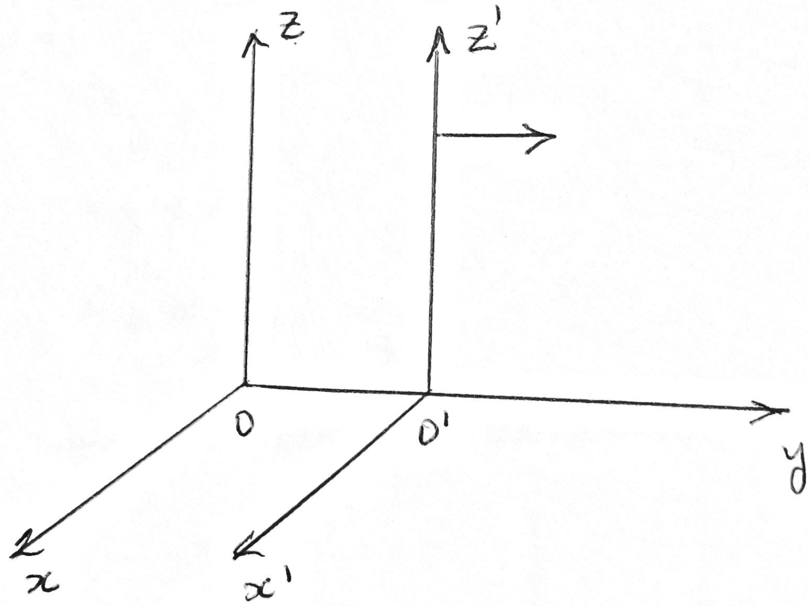
$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

para um boost ao longo do eixo x.

Vê-se claramente que para $\vec{E} = E_0\hat{z}$ e $\vec{B} = B_0\hat{x}$ não é possível anular o campo $\vec{E}$ com um boost ao longo de x.

O boost deve ser feito ao longo da direção y



As leis de transformação nesse caso podem ser obtidas das originais mediante as substituições

$$x \to y$$

$$y \to z$$

$$z \to x$$

e, portanto

$$E'_y = E_y \qquad B'_y = B_y$$

$$E'_z = \gamma(E_z - v B_x) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x\right)$$

$$E'_x = \gamma(E_x + v B_z) \qquad B'_x = \gamma\left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z\right)$$

com

$$E_y = 0 \qquad B_y = 0$$

$$E_z = E_0 \qquad B_z = 0$$

$$E_x = 0 \qquad B_x = B_0$$

Então, para uma velocidade de boost ao longo de y tal que

$$v = \frac{E_z}{B_x} = \frac{E_0}{B_0} < c$$

anula-se o campo $\vec{E}'$ em S'

Em S'

$B'_y = 0$

$B'_z = 0$

$$B'_x = \gamma\left(B_0 - \frac{v}{c^2}E_0\right) = \gamma B_0 \underbrace{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{E_0}{B_0}\right)}_{= 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{B_0}{\gamma}$$

Então $\vec{B}' = \dfrac{B_0}{\gamma}\hat{x}$

Nesse mesmo referencial, a carga q tem velocidade inicial $-v\hat{y} = \vec{u}_0$ e está sujeita à força

$$\vec{F}' = q\,\vec{u}' \times \vec{B}' \Rightarrow \vec{F}' \perp \vec{u}' \quad \left(\begin{array}{c}\text{não realiza}\\ \text{trabalho}\end{array}\right)$$

Para $\vec{u}' \perp \vec{B}'$

$$F' = q u' B'$$

com

$$F' = \frac{dp'}{dt} = p'\frac{d\theta}{dt} = p'\frac{u'}{R}$$

$p' = |\vec{p}'|$ é a magnitude do 3-momento

R é o raio da trajetória circular em S'.

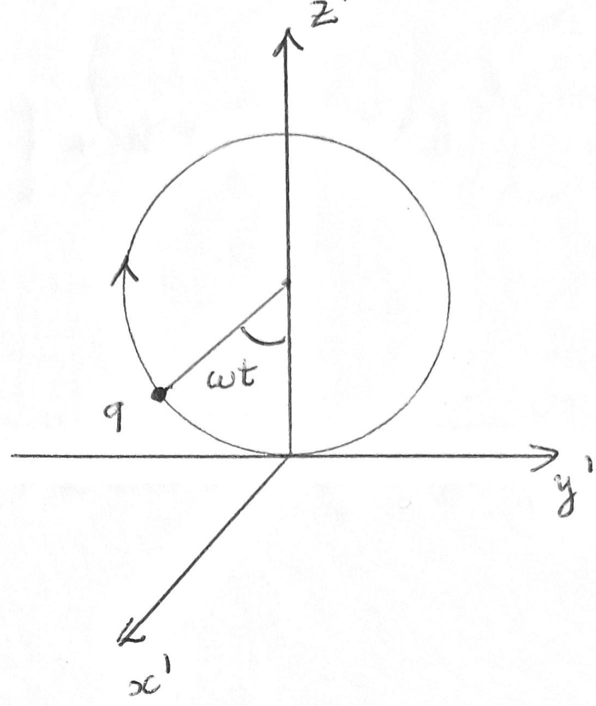
$u' = v$

Então

$$p' = qB'R \Rightarrow \frac{mu'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\frac{B_0}{\gamma}R$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{\gamma^2 m v}{q B_0}$$



Trajetória em S'

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -R\sin(\omega t') \\ z' = R(1-\cos(\omega t')) \end{cases} \quad \text{com } \omega = \frac{v}{R}$$

De volta para S

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \gamma(y' + vt') \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}y'\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right) \end{aligned}$$

$x = 0$

$$y = \gamma\left[-R\sin(\omega t') + v t'\right]$$

$$= \gamma\left\{-R\sin\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right] + v\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{y\left(1 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right)}_{= \gamma^2 y} = \gamma^2 v t - \gamma R\sin\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma(y - vt) = -R\sin\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right]$$

$$\boxed{y = vt - \frac{R}{\gamma}\sin\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right]}$$

$$z = R\left[1 - \cos(\omega t')\right] = R\left[1 - \cos\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right]\right]$$

$$\boxed{z = R - R\cos\left[\omega\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right]}$$

Perceba que

$$\gamma^2(y-vt)^2+(z-R)^2=R^2$$

$\gamma=1 \Rightarrow$ ciclóide

Logo, o efeito relativístico é esticar a ciclóide ao longo da direção y.