Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 11 - página 121.
Artur Hideyuki Tomita

5. Teoremas do Anulamento, do Valor Médio e de Weierstrass.

O Teorema do anulamento (ou de Bolzano) é geometricamente o que se espera que aconteça: se estivermos abaixo (ou acima) do eixo x e passamos com uma caneta para cima (resp. para baixo) do eixo x, alguma hora temos que cruzar o eixo x. É importante notar que o Teorema do anulamento diz que a função se anula em algum ponto. Não diz se em um ou mais pontos nem onde fica o ponto. É o que chamamos de um teorema existencial, nós só podemos afirmar que existe. Quando queremos saber onde fica mais ou menos o ponto é preciso fazer cálculos de aproximação a não ser que o ponto em que se anula seja fácil de encontrar.

No gráfico da página 121, vemos que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Então o teorema diz que essa função se anula em algum ponto c, mas no caso há mais dois outros pontos que se anulam.

O Exemplo 1 indica que existe pelo menos uma raiz real. Por meio de chute podemos encontrar um ponto abaixo do eixo e um ponto acima do eixo. No caso, ele mostra que $f(-3) < 0$ e $f(-2) > 0$. Assim, existe uma raiz entre -3 e -2. Por ser uma função polinomial de grau 3, existem no máximo 3 raízes reais. Depois de estudar derivação estaremos em melhores condições de analisar o número de raízes desse polinômio.

O Teorema do Valor Intermediário é similar ao Teorema do anulamento, a única diferenç a é que pegamos uma reta horizontal qualquer ao invés do eixo. Mais para frente no curso, veremos o Teorema do Valor Médio. Não confundir os nomes.

O Teorema de Weierstrass diz que uma função contínua num intervalo fechado e limitado tem máximo e mínimo. Assim como o dois teoremas acima, é um teorema existencial. Para descobrir onde está o máximo e o mínimo serão analisados para funções deriváveis.

O Exemplo 2 mostra uma função contínua num intervalo fechado e limitado. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, possui máximo e mínimo, mas no momento não vimos as ferramentas para encontrá-los. Tanto o ponto de máximo/mínimo quanto o valor máximo e mínimo serão estudados depois que vermos derivação.

6. Funções Exponencial e Logarítmica.

6.1 Potência com expoente real.

Como discutimos no início do semestre, dado $a > 0$ podemos definir $a^{\frac{m}{n}}$ para todo racional $\frac{m}{n}$. Usando limites podemos então definir a^x para todo x

real, usando $a^x = \sup\{a^{\frac{m}{n}} : \frac{m}{n} < x\}$ se $a > 1$ (a função sobre os racionais é crescente) e $a^x = \inf\{a^{\frac{m}{n}} : \frac{m}{n} < x\}$ se $0 < a < 1$ (a função sobre os racionais é decrescente).

Por definição dizemos que $f(x) = a^x$ é a função exponencial de base a quando $a > 0$ e $a \neq 1$.

As propriedades principais e a 'cara' do gráfico para $a > 1$ e $0 < a < 1$ podem ser vistas na página 126. É importante notar que

se $a > 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ (vai para 0 por cima do eixo x, ela decresce para 0 por que estamos indo para $-\infty$ - a função é crescente) e

se $0 < a < 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ (vai para 0 por cima do eixo x) e $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ (quando vamos para $-\infty$ estamos subindo por que a orientação é reversa - note que neste caso a função é decrescente).

Isto está indicado no Exemplo 3, mas como pulamos alguns fatos, talvez seja um pouco difícil seguir o argumento.

6.2 Logaritmo.

A função logarítmo na base a é a função inversa da função exponencial na base a.

Nas páginas 129 e 130 são dados as principais propriedades de logaritmo.

No Exemplo 2 vemos a 'cara' da função logarítmica quando $a > 1$ e $0 < a < 1$. É importante notar que o domínio da função logarítmica é $]0, +\infty[$, assim podemos calcular o $\lim_{x\to0^+} log_a x$, mas não é correto tentar calcular $\lim_{x\to0} log_a x$.

Note que

se $a > 1$ então $\lim_{x\to0^+} log_a x = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} log_a x = +\infty$ e

se $0 < a < 1$ então $\lim_{x\to0^+} log_a x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} log_a x = -\infty$.

A argumentação é dada no Exemplo 3, mas o importante é lembrar a cara dos gráficos e deduzir quais são os limites quando vamos para 0^+ e $+\infty$.

6.3 $lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$.

Foi feito anteriormente um calculo usando $lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ para definir o número e. Nesta seção é mostrada que podemos passar dos naturais para x (os x que interessam para a definição do limite são $x > 0$).

Assim, o importante é lembrar que $lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$. É importante destacar que $2 < e < 3$ e portanto o gráfico de e^x corresponde ao caso do gráfico de a^x em que $a > 1$.

O Exemplo 1 mostra que $lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Isto é usado para podermos depois usar no Exemplo 2 que

$lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (usando os limites laterais e uma mudança de variável).

O Exemplo 3 é o cálculo da derivada de e^x no ponto 0 pela definição de derivada, $\lim_{h\to0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.