

Solução da Equação de Ondas com Fontes Variáveis no Tempo

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Sec. 6.4]

→[Bo Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec 3.5.1]

Transformada de Fourier – recordação

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} f(\tau) d\tau ; \quad f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda$$

Exemplo: $f(x) = \delta(x - a)$

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \delta(x - a) dx = \frac{e^{i\lambda a}}{2\pi} ; \quad \delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(a-x)} d\lambda$$

Equações de Onda

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} ;$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Expressão geral

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t)$$

onde $g(\vec{r}, t)$ é a fonte. Aplicando a transformada de Fourier a todos os membros da equação, resulta

$$\nabla^2 \psi_\omega(\vec{r}) + k^2 \psi_\omega(\vec{r}) = -g_\omega(\vec{r}); \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \quad g_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Esta é a Equação de Helmholtz, cuja solução já obtivemos pela método da Função de Green (Aula 7 ABR 2020)

$$\psi_\omega(\vec{r}) = \int g_\omega(\vec{r}') G_\omega(\vec{r}, \vec{r}') dV'; \quad G_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = C_+ \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + C_- \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}; \quad C_+ + C_- = \frac{1}{4\pi}$$

Substituindo na expressão da transformada inversa, temos

$$\psi(\vec{r}, t) = C_+ \int dV' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g_\omega(\vec{r}') \frac{e^{-i[\omega t - k|\vec{r}-\vec{r}'|]}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + C_- \int dV' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g_\omega(\vec{r}') \frac{e^{-i[\omega t + k|\vec{r}-\vec{r}'|]}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Para calcular $\psi(\vec{r}, t)$, seria interessante ter $g(\vec{r}, t)$ e não sua transformada nessas integrais. Para isso, vamos definir duas funções do tempo e espaço,

Tempo retardado: $t'_{ret} = t - \frac{k}{\omega} |\vec{r} - \vec{r}'| = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$

Tempo avançado: $t'_{ava} = t + \frac{k}{\omega} |\vec{r} - \vec{r}'| = t + \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$

Com essas definições, temos

$$\psi(\vec{r}, t) = C_+ \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'_{ret}} g_{\omega}(\vec{r}') d\omega + C_- \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'_{ava}} g_{\omega}(\vec{r}') d\omega$$

As duas integrais no domínio da frequência são as transformadas inversas de $g_{\omega}(\vec{r}')$; então

$$\psi(\vec{r}, t) = C_+ \int \frac{g(\vec{r}', t'_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + C_- \int \frac{g(\vec{r}', t'_{ava})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Primeira integral: contribuição da fonte em instantes anteriores a t para os quais a informação chegou após percorrer a distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ com velocidade c , satisfazendo a condição de causalidade.

Segunda integral: contribuição da fonte em instantes posteriores a t para os quais a condição de causalidade não é satisfeita (ver comentário no Jackson, entre equações 6.45 e 6.46).

Considerando a causalidade, escolhemos $C_+ = 1/4\pi$; $C_- = 0$, e as expressões para os potenciais ficam

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t'_{ret}, \vec{r}'(t'_{ret}))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(t'_{ret}, \vec{r}'(t'_{ret}))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'\end{aligned}$$

Observações:

1. No caso geral, a fonte pode não estar fixa no espaço, como no caso de uma carga em movimento, portanto sua posição também depende do tempo retardado $\vec{r}'(t'_{ret})$.
2. Estas expressões são válidas para o calibre de Lorentz. As expressões para o calibre de Coulomb são discutidas na seção 3.5.2 do Bo Thidé.

Expressões para os campos

[Jackson; Sec 6.5; O. Jefimenko; Electricity and Magnetism, 2nd Edition (1989)]

[Bo Thidé; 5.1; 5.2 – cálculo no domínio de frequência]

Operações envolvendo tempo retardado

- $[\nabla' \rho(\vec{r}', t')]_{ret} \rightarrow$
- 1) calcular todas as derivadas parciais com relação a (x', y', z') mantendo t' fixo;
 - 2) no resultado, onde houver t' , substituir por $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$.
- $\nabla' [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} \rightarrow$
- 1) calcular todas as derivadas parciais com relação a (x', y', z') mantendo $\vec{r}$; t fixos;
 - 2) derivada agrega um termo a mais devido à dependência implícita de t_{ret} com $\vec{r}'$.
- $\nabla [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} \rightarrow$
- 1) calcular todas as derivadas parciais com relação a (x, y, z) mantendo $\vec{r}'$; t fixos;
 - 2) derivada agrega um termo a mais devido à dependência implícita de t'_{ret} com $\vec{r}$, mas não dentro de $\vec{r}'(t'_{ret})$.

Campo Elétrico ($t'_{ret} = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \left[\frac{[\rho(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\nabla \left[\frac{[\rho(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret} \nabla(t'_{ret}); \nabla(t'_{ret}) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\therefore \nabla \left[\frac{[\rho(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} = \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \frac{\partial t'_{ret}}{\partial t} = \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret}$$

Portanto

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{ret} - \frac{1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \right\} dV'$$

Campo Magnético

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[\frac{[\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV'$$

$$\nabla \times \left[\frac{[\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \times [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} + \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret}$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret}]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} [j_k(\vec{r}', t')]_{ret} - \frac{\partial}{\partial x_k} [j_j(\vec{r}', t')]_{ret} \\ &= \left[\frac{\partial j_k}{\partial t'} \right]_{ret} \frac{\partial t'}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial j_j}{\partial t'} \right]_{ret} \frac{\partial t'}{\partial x_k} = \left[\frac{\partial j_k}{\partial t'} \right]_{ret} \frac{x_j - x'_j}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \left[\frac{\partial j_j}{\partial t'} \right]_{ret} \frac{x_k - x'_k}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

$$\nabla \times [\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} = \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{[\vec{J}(\vec{r}', t')]_{ret} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\} dV'$$