

3 Teoria de Ondas Marítimas

3.1. Introdução

Ondas do mar resultam da ação de forças sobre um fluido de maneira a perturbar o seu estado inicial, isto é, deformá-lo. Estas forças são provocadas por diversos agentes físicos como a ação dos ventos, ação de terremotos, movimento de embarcações ou até mesmo o impacto de um objeto. Uma vez perturbado, a propagação de ondas no fluido se dá sob a atuação da gravidade e da tensão superficial.

Neste capítulo, apresenta-se um modelo representativo da propagação de onda em um meio marinho. O problema físico específico de onda de superfície, considerado no presente estudo, e sua respectiva representação matemática é apresentado na seção 3.2. Na abordagem deste problema, empregou-se a teoria linear de Airy, desenvolvida na seção 3.3. De uma forma geral, as teorias de ondas são descritas empregando-se três parâmetros básicos: a altura de onda H , o comprimento de onda L e a profundidade d da lâmina d'água. Outros parâmetros, como os campos de pressão, de velocidades e de acelerações das partículas do fluido, induzidos pelas ondas, são obtidos analiticamente em função destas quantidades básicas, fazendo-se uso de teorias disponíveis na literatura.

O desenvolvimento de uma teoria para onda requer resolver-se um problema de valor de contorno, formulado através de uma equação diferencial sob determinadas condições de contorno: “A formulação de um problema de contorno é simplesmente a expressão, em termos matemáticos, da situação física em que apenas uma solução única existe. Isto geralmente consiste em inicialmente estabelecer-se a região de interesse e a equação diferencial que deve ser satisfeita nesta região” (Dean, Dalrymple, 2001, p. 43). Na solução de equações diferenciais, escolhe-se, dentre as possíveis soluções, aquelas que apresentam relevância para o problema físico estudado através da imposição das condições de

contorno. Um exemplo típico do problema de valor de contorno é o da vibração transversal da corda de um violão. Este corresponde a um caso pré-tracionado, bi-apoiado, com movimento transversal $w(x,t)$.

A equação uni-dimensional representativa da dinâmica da corda sujeita à vibração na direção vertical é dada por (Inman, 2001):

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

onde c é a velocidade de onda, dependente de três parâmetros físicos da corda: tração, massa específica e área da seção transversal da corda. A equação (3.1.1) apresenta derivadas temporais e espaciais, ambas de segunda ordem. Portanto, duas condições devem ser impostas à solução $w(x,t)$, referentes às constantes resultantes da integração da derivada espacial. Estas condições resultam do fato de que nas extremidades o deslocamento é nulo para todo o intervalo de tempo da análise. Logo,

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.2)$$

que correspondem às condições do problema de valor de contorno descrito.

3.2. Formulação do Problema de Ondas de Superfície

Conforme as características geométricas apresentadas na figura 3.1, representativas do movimento de uma onda, consideram-se as seguintes hipóteses: a) as ondas são progressivas na direção positiva de x ; b) o fundo marítimo é plano e horizontal com profundidade $z = -d$; c) diferentemente das ondas oceânicas reais que possuem natureza randômica, as ondas em questão são periódicas e uniformes, possuindo altura de onda H e período T ; d) o fluido, meio de propagação da onda, possui movimento irrotacional e é incompressível; e) a superfície livre é representada pela função $\eta(x, y, t)$.

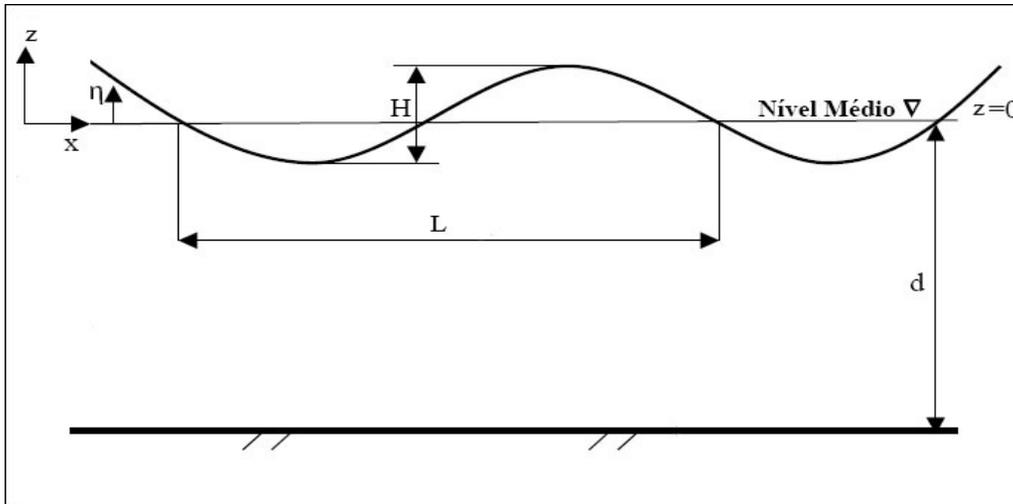


Figura 3.1 - Esquema de um trem de ondas progressivo e seus valores característicos

A equação diferencial de movimento da onda resulta da hipótese do contínuo, em que um fluido é tratado como uma distribuição contínua de matéria. Considera-se um volume de controle prismático do fluido com arestas de comprimento dx , dy e dz cuja massa específica no centro do volume de controle é ρ e a velocidade é $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$, onde u , v e w são as componentes da velocidade da partícula do fluido.

Utilizando-se a aproximação linear, correspondente ao termo linear da expansão em série de Taylor, tem-se, nas faces à direita ($x = x + dx/2$) e à esquerda ($x = x - dx/2$):

$$\rho|_{x \pm dx/2} = \rho \pm \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (3.2.1)$$

$$u|_{x \pm dx/2} = u \pm \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{dx}{2}$$

onde ρ , u , $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\frac{du}{dx}$ são avaliados no centro do volume de controle.

Da conservação de massa, o volume de controle na forma integral pode ser expressa por:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0 \quad (3.2.2)$$

onde $d\vec{A}$ é o vetor área do volume de controle e o primeiro termo representa a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle, e o segundo termo representa a taxa de variação de massa dentro do volume de controle. Para avaliar o primeiro termo da equação (3.2.2), considera-se o fluxo de massa em cada uma das seis faces. Considerando-se as velocidades através das faces na direção do sentido positivo dos eixos coordenados, podemos escrever o fluxo para a face esquerda e direita respectivamente, da seguinte forma:

$$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{-x} = - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dydz \quad (3.2.3)$$

$$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_x = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dydz$$

Da adição das equações acima, a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle na direção x , resulta em:

$$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{-x} + \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_x = \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy dz = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (3.2.4)$$

De maneira similar obtém-se o fluxo de massa nas direções y e z , e, assim, a taxa líquida do fluxo de massa para fora da superfície de controle do elemento resulta em:

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (3.2.5)$$

A massa de fluido no volume de controle, em qualquer instante, é obtida do produto da massa específica ρ pelo volume $dx dy dz$. Assim, o segundo termo da equação (3.2.2) resulta na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.2.6)$$

e, portanto, a equação de conservação de massa em (3.2.2), na forma diferencial, é

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.2.7)$$

Para um fluido incompressível, ρ é independente das coordenadas espaciais e do tempo, e a equação de conservação de massa simplifica-se na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.8)$$

Ondas reais se propagam em fluidos viscosos, porém na maioria dos casos grande parte do movimento do fluido é quase irrotacional. Isto se dá devido ao fato dos efeitos viscosos ocorrerem numa fina camada próxima à superfície d'água e ao fundo marítimo (Dean, Dalrymple, 2001), sempre nas proximidades da transição entre os meios. Ao considerarmos a hipótese do movimento do fluido ser irrotacional, uma função potencial $\Phi(x, y, z)$ é definida de maneira que (Fox & McDonald, 2001) :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ e } w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.2.9)$$

e a equação de conservação de massa (3.2.8), é assim expressa pela seguinte equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2.10)$$

presente em várias áreas das ciências físicas e da engenharia (Fox, McDonald, 1998). Uma função Φ que satisfaça a equação de Laplace representa um possível campo de escoamento incompressível e irrotacional. No entanto, apenas as soluções que satisfaçam as condições de contorno adequadas são aplicáveis ao movimento de ondas de interesse.

Da hipótese de que o solo marinho é plano e horizontal, a condição de contorno no fundo do mar implica que a componente vertical de velocidade é nula, condição expressa pela equação

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -d \quad (3.2.11)$$

Uma das dificuldades ao se representar o problema de ondas marinhas é o fato de que uma das fronteiras, a superfície livre, ser desconhecida. Desta forma, utiliza-se uma nova incógnita η no problema, que, no caso mais geral de movimento tridimensional, é dada pela equação $z = \eta(x, y, t)$. A variação de z em relação ao tempo t é obtida na forma:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.2.12)$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{em } z = \eta \quad (3.2.13)$$

utilizando-se as definições

$$u = \frac{dx}{dt} ; \quad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad w = \frac{dz}{dt} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\eta}$$

A equação (3.2.13) é a condição não-linear cinemática da superfície livre e representa, fisicamente, o fato de que uma partícula fluida na superfície livre não se move para o interior do fluido.

Ao contrário de superfícies fixas, a superfície livre do fluido não suporta variações de pressão, e, conseqüentemente, deve se deformar de maneira a manter a pressão constante. Uma segunda condição de contorno para descrever a distribuição de pressão na superfície livre torna-se necessária. Através da utilização da equação de Bernoulli, que relaciona o campo de pressões no fluido e a sua cinemática. A equação de Bernoulli, em sua forma transiente, pode ser

obtida através da integração das equações de Euler (Dean, Dalrymple, 2001), considerando o escoamento irrotacional:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = C(t) \quad (3.2.14)$$

onde as componentes da velocidade estão expressas em função de Φ , e $C(t)$ é uma função arbitrária do tempo a ser eliminada, uma vez englobada no potencial de velocidade. Para isto, define-se uma função $f(t)$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = -C(t)$$

e, utilizando-se a definição $\Phi'(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) + f(t)$, a equação (3.2.14) pode ser reescrita na forma seguinte

$$\rho \frac{\partial (\Phi')}{\partial t} + p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.2.15)$$

porque as derivadas espaciais de $\Phi'(x, y, z, t)$ são exatamente iguais às de $\Phi(x, y, z, t)$. Desta forma, utiliza-se Φ' como potencial de velocidade, ou, equivalentemente, faz-se uso da constante espacial de Bernoulli $C(t)$ na equação (3.2.14) como sendo igual a zero.

Considerando-se a pressão barométrica e a equação (3.2.15) na superfície livre do fluido, obtém-se a terceira condição de contorno:

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\text{Termo de inércia local}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]}_{\text{Termo de inércia convectiva}} + \underbrace{g\eta}_{\text{Termo de gravidade}} = 0 \quad \text{em } z = \eta \quad (3.2.16)$$

Desta forma, a função potencial Φ a ser obtida deve satisfazer à equação (3.2.10) para todo o domínio considerado, à condição de contorno no fundo

descrita em (3.2.11), e às condições de contorno cinemática e dinâmica na superfície livre, descritas em (3.2.13) e (3.2.16), respectivamente. A resolução do problema assim descrito não é uma tarefa trivial porque duas condições de contornos são não-lineares e devem ser satisfeitas na superfície livre, cuja forma é variável no tempo.

3.3. Solução do Modelo Matemático de Ondas

Na solução do problema descrito na seção anterior, algumas simplificações poderão ser estabelecidas, permitindo contornar os efeitos das não-linearidades presentes. Assim, diversas teorias de ondas associadas a diferentes simplificações podem ser consideradas apresentando diferentes níveis de precisão. A escolha da teoria da teoria mais adequada depende em geral dos efeitos não-lineares presentes como a importância relativa entre o termo de inércia convectiva e o termo de inércia local da equação (3.2.16). Na avaliação da importância destes termos inerciais em presença dos demais, três parâmetros característicos são utilizados: a altura de onda H , o comprimento de onda L e a profundidade da lâmina d'água d . Para o caso de onda de pequena altura, a velocidade da partícula fluida é menor e, em consequência, o termo de inércia convectiva, que depende do quadrado da velocidade, pode ser desprezado relativamente ao termo de inércia local.

Três parâmetros adimensionais H/L , H/d e L/d indicam que a importância relativa do termo de inércia convectiva em relação ao termo de inércia local é maior quando estas razões aumentam (Méhauté, 1976).

Em lâminas d'água de grandes profundidades, os parâmetros H/d e L/d são menores do que H/L . Já em águas rasas, o parâmetro mais significativo é H/d , chamado de altura relativa. No caso de profundidades intermediárias, o parâmetro mais significativo é $(H/L)(L/d)^3$ (Méhauté, 1976).

Dependendo do problema considerado e dos valores de H/L , H/d e L/d , três diferentes tipos de solução podem ser consideradas: linearização, séries de

potências e métodos numéricos. Métodos estatísticos também são utilizados para descrever a complexidade de um estado marítimo ou de ondas geradas por ventos.

Para pequenos valores dos parâmetros acima, as teorias lineares são válidas, em que os termos da inércia convectiva são completamente desconsiderados. Nestes casos temos ondas de pequenas amplitudes e pequeno comprimento de onda, em relação a grandes profundidades de lâmina d'água.

3.3.1. Teoria Linear de Airy

No presente trabalho é utilizada a teoria de ondas de pequena amplitude, também conhecida como teoria de Airy. Esta teoria se baseia na hipótese de que a altura é pequena em relação ao comprimento de onda e à profundidade da lâmina d'água. Com isto, as condições de contorno da superfície livre podem ser linearizadas e satisfeitas na superfície média ao invés de na superfície livre.

Esta teoria fornece equações que são teoricamente exatas quando os movimentos de onda são iguais a zero, porém esta solução é assumida como sendo válida para movimentos de onda diferentes de zero. A teoria linear de Airy é aplicável para situações onde $H/d \ll 1$, $(H/L)(L/d)^3 \ll 1$ e $d/L > 0.5$ (Méhauté, 1976).

Devido às hipóteses adotadas, despreza-se o termo de inércia convectiva da equação (3.2.16):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{em } z = \eta \quad (3.3.1)$$

Como o movimento é assumido como sendo infinitesimalmente pequeno, η pode ser escrito como:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{em } z = 0 \quad (3.3.2)$$

Esta aproximação leva a um erro da mesma ordem de grandeza daquele cometido ao se desprezar o termo de inércia convectiva.

Os termos $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ são as componentes da inclinação da superfície livre e, em caso de pequenas amplitudes de onda, terão pequenos valores, o que nos

permite desprezar os termos não-lineares $u \frac{\partial \eta}{\partial x}$ e $v \frac{\partial \eta}{\partial z}$ da equação (3.2.13) resultando

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{em } z = 0 \quad (3.3.3)$$

Por fim, as condições dinâmica (3.3.2) e cinemática (3.3.3) podem ser combinadas de maneira a eliminar a incógnita η . A derivada de η com respeito ao tempo na condição dinâmica (3.3.2) fornece

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{em } z = 0 \quad (3.3.4)$$

Considerando-se (3.3.3) e (3.3.4) resulta em

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3.3.5)$$

que é a condição Cauchy-Poisson na superfície livre. Assim, para a determinação da função potencial Φ , esta deverá satisfazer as condições

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{cases} -d \leq z \leq \eta \\ -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -d \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad \text{em } z = 0$$

Este é um problema de valor de contorno cuja solução é obtida pela técnica da separação de variáveis conforme demonstrado por Chakrabarti (1987). A solução obtida para o potencial de velocidade para o caso bi-dimensional é:

$$\Phi = \frac{\pi H}{kT} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin[k(x-ct)] \quad (3.3.7)$$

onde k é o número de onda e é dado por $k = \frac{2\pi}{L}$, L é o comprimento de onda e é

dado por $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kd$ e a velocidade da onda progressiva é dada por

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd}.$$

A partir do potencial de velocidade Φ em (3.3.7), os campos de deslocamentos, velocidades, acelerações e pressão do fluido são obtidos, além da função que representa a superfície livre do fluido. Da equação (3.3.2) tem-se

$$\eta = \frac{H}{2} \cos[k(x-ct)] \quad (3.3.8)$$

e, substituindo o resultado para Φ em (3.3.7) nas relações (3.2.9), obtém-se as componentes da velocidades das partículas fluidas nas direções x e z . A componente horizontal da velocidade da partícula fluida é:

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos[k(x-ct)] \quad (3.3.9)$$

e a componente vertical da velocidade da partícula fluida é

$$w = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \sin[k(x-ct)] \quad (3.3.10)$$

Das expressões acima verifica-se que quando a velocidade horizontal da partícula de água for máxima, a velocidade vertical será nula. Como normalmente as amplitudes das duas componentes de velocidade são diferentes, podemos concluir que as partículas efetuarão uma órbita elíptica em torno de sua posição de repouso durante um ciclo completo da onda.

As derivadas de (3.3.9) e (3.3.10) em relação ao tempo resultam respectivamente nas expressões das acelerações da partícula fluida nas direções x e z :

$$\dot{u} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin[k(x-ct)] \quad (3.3.11)$$

$$\dot{w} = -\frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos[k(x-ct)] \quad (3.3.12)$$

Integrando as equações (3.3.9) e (3.3.10) obtém-se, respectivamente, os deslocamentos nas direções horizontal e vertical:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin[k(x-ct)] \quad (3.3.13)$$

$$\gamma = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos[k(x-ct)] \quad (3.3.14)$$

De (3.3.13) e (3.3.14) nota-se que o máximo deslocamento de uma partícula situada na superfície média é igual à amplitude da onda $\frac{H}{2}$.

O campo de pressão associado à onda progressiva é obtido através da equação de Bernoulli em sua forma transiente, equação (3.2.15), que resulta em

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.3.15)$$

onde os termos quadráticos foram desprezados. Para a onda progressiva descrita pelo potencial de velocidade na equação (3.3.7), obtém-se:

$$p = -\rho gz + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos[k(x-ct)] \quad (3.3.16)$$

ou:

$$p = -\rho gz + \rho g \eta K_p(z) \quad (3.3.17)$$

onde:

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \quad (3.3.18)$$

Na equação (3.3.17), o primeiro termo do lado direito representa a pressão hidrostática e o segundo é a pressão dinâmica, resultante das contribuições causadas pelo deslocamento da superfície livre e pela aceleração vertical, associada ao movimento da onda e a 180° fora de fase com o deslocamento da superfície livre. $K_p(z)$ é a função de decaimento de profundidade, e é responsável pelo decréscimo com a profundidade do valor calculado de pressão.

Como será demonstrado no capítulo 4, a determinação das forças em um corpo submerso está diretamente relacionado à cinemática da partícula fluida e ao campo de pressão provocado por este movimento. Na teoria linear de ondas, as condições de contorno são linearizadas, e são impostas no nível médio de onda e não mais na superfície livre. Com isto, as expressões da cinemática da partícula fluida e do campo de pressão são definidas na região situada entre o fundo marinho e a superfície média, porém são divergentes nas regiões das ondas situadas acima do nível médio do mar. Então, nas situações em que o efeito da variação da superfície livre sobre a força total atuante na estrutura se torna considerável, faz-se necessário o uso de uma modificação na teoria linear, de forma que as equações possam ser integradas até a superfície livre.

Neste trabalho, utiliza-se uma modificação empírica proposta por Wheeler (1969). Esta modificação altera a função de decaimento de profundidade $K_p(z)$. A função modificada utilizada é:

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(z+d) \left(\frac{d}{d+\eta} \right)}{\cosh kd} \quad (3.3.19)$$

Por esta equação, o termo $(z + d) \left(\frac{d}{d + \eta} \right)$ pode ser considerado como a uma altura efetiva na qual a força deve ser calculada. Esta altura efetiva é sempre menor do que o nível médio da água e é considerada na mesma proporção para a superfície média do que a altura atual, $(z + d)$, possui para a superfície livre no instante de tempo e no ponto considerado. Logo, com esta modificação, os valores da cinemática e de pressão do fluido na superfície livre serão idênticos aos valores originalmente calculados na superfície média, e suas variações hiperbólicas com a profundidade são mantidas.

Como exemplo, se desejarmos obter as velocidades em um ponto P situado a 90% da distância do fundo marinho até a superfície livre ($z + d / \eta + d = 0.9$), o emprego da modificação (3.3.19) fornecerá a velocidade no ponto Pe, com uma altura efetiva de $(z + d) \left(\frac{d}{d + \eta} \right) = 0.9d$, conforme pode ser observado na figura 3.2:

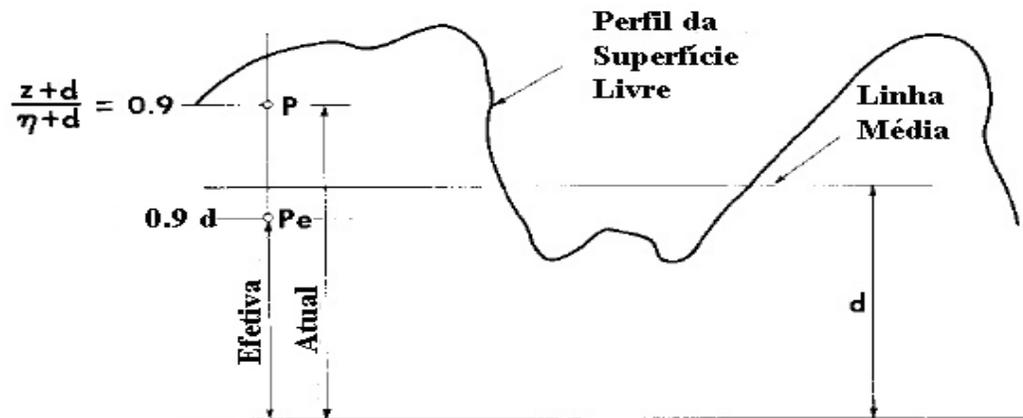


Figura 3.2 - Localização da altura atual e efetiva utilizada na modificação de $K_p(z)$ considerando um perfil genérico para a superfície livre.

Estudos efetuados em Gudmestad & Connor (1986) demonstraram que a aproximação de Wheeler gera resultados para a cinemática da onda mais próximos a resultados experimentais quando comparados com os obtidos por outras aproximações de superfície livre.