4320196 – Física para Engenharia II - Prova P2 - 2012

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma **raiz que não seja um quadrado perfeito** ou uma **fração irredutível**, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

$y(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$

$v = \frac{\omega}{k};\ \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\ I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2;\ k_n = n\frac{\pi}{L};\ k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$

$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a)$

$A\mathrm{sen}(kx - \omega t) + A\mathrm{sen}(kx + \omega t) = 2A\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$

$A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

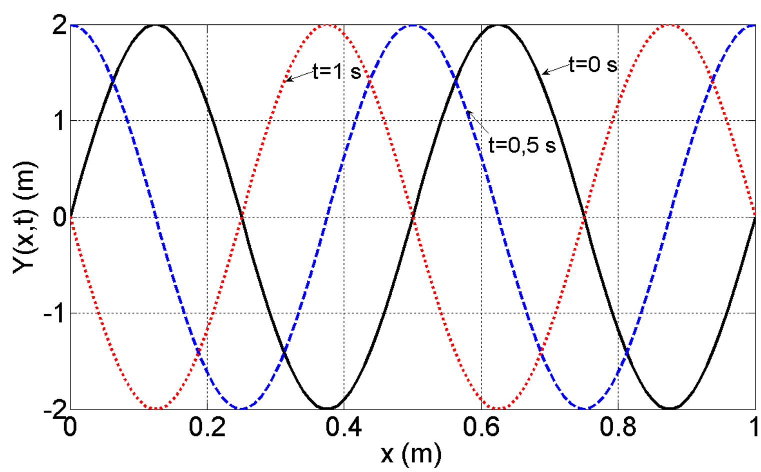
$y(x,t) = 2A\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t).\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

$f = f_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)}\quad \begin{cases} u \to \text{observador} \\ V \to \text{fonte} \end{cases}$

$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{v_s}{V}$

Q1 - Na figura ao lado, são mostrados 3 instantes de tempos diferentes ($t = 0$, $t = 0,5$ s e $t = 1$ s) da funcão $y(x,t)$ que descreve uma onda harmônica propagando-se em uma corda no sentido *negativo* de x.

Com base nas informações do gráfico:



(a) [0,5] Calcule o comprimento de onda, o período e a velocidade da onda (Justifique).

(b) [0,5] Se a tensão na corda é $0,25$ N, calcule a densidade linear de massa da corda.

(c) [0,5] Escreva a expressão para o perfil da onda $y(x,t)$.

(d) [0,5] Calcule a velocidade e aceleração transversais máximas de um elemento da corda.

(e) [0,5] Calcule a intensidade (ou seja, a potência média) da onda na corda.

Solução Q1:

a) Comprimento da onda: No gráfico há 2λ em 1 m, logo $\boxed{\lambda = 0,5 \text{ m}}$

Período T: Pelo gráfico podemos notar que a onda caminha $\lambda/2$ em 1 s, logo $v = \lambda/2$ m/s. Como $v = \lambda/T$, então $\boxed{T = 2 \text{ s}}$

Velocidade da onda (em módulo): $\boxed{v = \lambda/T = 1/4 \text{ m/s}}$

b) $v = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}}$ logo $\boxed{\mu = \frac{\mathcal{T}}{v^2} = 16.0,25 = 4 \text{ kg/m}}$

c) A forma geral para ondas propagando-se na direção x-negativo é $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi)$.

De (a), temos $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \text{ m}^{-1}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s.

Do gráfico, a amplitude da onda é $A = 2$ m.

A fase pode ser determinada usando:

$y(x = 0, t = 0) = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$.

$y(x = \lambda/4, t = 0) = +2 \Rightarrow \cos(\pi/2 + \phi) = 1 \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$

Assim $\boxed{y(x,t) = 2\cos(4\,\pi\,x + \pi\,t - \pi/2) = 2\,\text{sen}(4\,\pi\,x + \pi\,t)}$

d) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 2\pi\cos(4\,\pi\,x + \pi\,t)$.

O máximo ocorre para $\cos(4\,\pi\,x + \pi\,t) = 1$ ou seja $\boxed{v_{y\ \max} = 2\pi \text{ m/s}}$.

$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -2\pi^2\,\text{sen}(4\,\pi\,x + \pi\,t)$.

O máximo ocorre para $\text{sen}(4\,\pi\,x + \pi\,t) = 1$ ou seja $\boxed{a_{y\ \max} = 2\pi^2 \text{ m/s}}$.

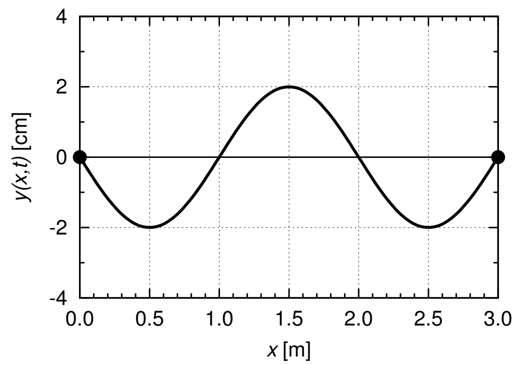
e) A intensidade é dada por $I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$, logo

$\boxed{I = \frac{1}{2}.4.\frac{1}{4}.\pi^2.4 = 2\pi^2 \text{ W}}$.

Q2 - Em um sistema de coordenadas, uma corda homogênea de massa $m = 0,15$ kg e extremidades fixas em $x_a = 0,0$ m e $x_b = 3,0$ m vibra em seu terceiro harmônico com amplitude máxima $A = 2$ cm de acordo com

$$y(x,t) = A\,F(x)G(t)\,,$$

com x dados em metros e t em segundos. A figura ao lado mostra a configuração da corda no instante $t = 0$ s, com o eixo x em metros e o eixo y em centímetros. Após $t = 0,25$ s, observa-se que a corda passa instantaneamente pela primeira vez na configuração de equilíbrio, ou seja, $y(x, t = 0,25\,\text{s}) = 0$ para todo x.



(a) [0,5] Obtenha a velocidade de propagação de ondas na corda.

(b) [0,5] Obtenha a tensão na corda.

(c) [0,75] Obtenha a forma explícita de $y(x,t)$, considerando F e G como funções co-seno.

(d) [0,75] Calcule as amplitudes (A_1 e A_2) e as constantes de fase (ϕ_1 e ϕ_2) das ondas progressiva $y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1)$ e regressiva $y_2(x,t) = A_2 \cos(kx + \omega t + \phi_2)$ que, somadas, resultam na onda estacionária acima.

Dica: escreva $\phi_1 = \varphi - \delta$, $\phi_2 = \varphi + \delta$, onde φ e δ estão associados com as partes espacial e temporal de $y(x,t)$ respectivamente.

Solução Q2:

(a) O comprimento da corda é $L = x_b - x_a = 3$ m e vibra em seu 3º harmônico. Portanto,

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad k_3 = \frac{3\pi}{3\text{ m}} = \pi \text{ rad/m}\,.$$

Para obtermos a frequência angular (no 3º harmônico) basta notar que, em $t = 0$ s, os ventres da onda estacionária têm amplitude máxima e em $t = 0,25$ s eles possuem amplitude zero. Isso corresponde a um deslocamento angular de $\pi/2$. Logo,

$$\frac{\pi}{2} = \omega_3\,\Delta t = \omega_3\,(0,25\text{ s} - 0\text{ s}) = \frac{\omega_3}{4} \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 2\pi \text{ rad/s}\,.$$

A velocidade de propagação de ondas na corda é

$$v = \frac{\omega_3}{k_3} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\text{ m/s}\,.$$

(b) A densidade linear da corda é $\mu = m/L = 0,15/3 = 0,05$ Kg/m e, do ítem anterior, $v = 2$ m/s. Portanto, a tensão na corda é

$$\mathcal{T} = \mu\, v^2 = 0,2\text{ N}\,.$$

(c) Em termos da função co-seno a onda estacionária é escrita como

$$y(x,t) = A\cos(kx+\alpha)\cos(\omega t+\beta)$$

onde α é tal que satisfaz as condições de contorno $y(0,t) = y(3,t) = 0$. A primeira condição leva a

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

A segunda condição é equivalente à primeira. Para determinar o sinal basta notar no gráfico que $\cos(kx+\alpha) < 0$ para $0\,\mathrm{m} < x < 1\,\mathrm{m}$, implicando em $\frac{\pi}{2} < kx+\alpha < \frac{3\pi}{2}$ neste intervalo. Portanto, $\alpha = +\frac{\pi}{2}$.

Para $t = 0$ s, $\cos(\omega t+\beta) = \cos\beta = 1$ (amplitude máxima). Portanto, $\beta = 0$ e a forma explícita de $y(x,t)$ fica

$$y(x,t) = 0,02\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi t)\,. \tag{1}$$

(d) Usando a dica temos

$$\begin{aligned}
y_1(x,t) &= A_1\cos(kx-\omega t+\varphi-\delta) = A_1\cos\Big[\underbrace{(kx+\varphi)}_{a} - \underbrace{(\omega t+\delta)}_{b}\Big] \\
&= A_1\cos(a-b) = A_1\Big[\cos(a)\cos(b) + \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\Big]\,, \\
y_2(x,t) &= A_2\cos(kx+\omega t+\varphi+\delta) = A_2\cos(a+b) = A_2\Big[\cos(a)\cos(b) - \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\Big]\,, \\
y(x,t) &= y_1(x,t)+y_2(x,t) = \cos(a)\cos(b)\,[A_1+A_2] + \,\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\,[A_1-A_2]\,.
\end{aligned}$$

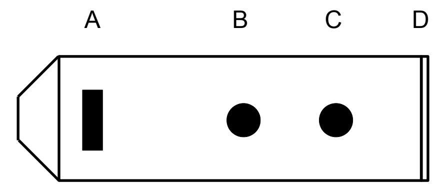
Comparando com a expressão (1) temos

$$\begin{aligned}
&A_1 - A_2 = 0 && \Rightarrow \quad A_1 = A_2\,, \\
&A_1 + A_2 = 0,02\ \mathrm{m} && \Rightarrow \quad A_1 = 0,01\ \mathrm{m}\,, \\
&a = kx+\varphi = \pi x + \tfrac{\pi}{2} && \Rightarrow \quad \varphi = \tfrac{\pi}{2}\,, \\
&b = \omega t + \delta = 2\pi t && \Rightarrow \quad \delta = 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi_1 = \phi_2 = \varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$y_1(x,t) = 0,01\,\cos(\pi x - 2\pi t + \pi/2) \qquad \text{e} \qquad y_2(x,t) = 0,01\,\cos(\pi x + 2\pi t + \pi/2)\,.$$

Q3 - Uma flauta muito simples, como esquematizada na figura abaixo, possui sua extremidade aberta em D. Existe uma abertura em A (perto da parte que vai à boca) e também dois outros buracos em B e C. A distância AD é igual a 0,4 m. A distância do segmento AB é idêntica a do segmento BD. Além disso, o segmento $BC = CD$. Considere a velocidade do som no ar igual a 340 m/s. Qual seria a frequência do **modo fundamental** que você esperaria ouvir ao:



(a) [0,5] assoprar, mantendo os buracos B e C fechados? Justifique sua resposta.

(b) [0,5] assoprar, tapando apenas o buraco B? Observa-se experimentalmente que a variação de pressão entre os pontos C e D é basicamente nula. Justifique sua resposta.

(c) [0,5] assoprar, sem tapar os buracos B e C? Justifique sua resposta.

(c) [1,0] Considere agora que um amigo seu trouxe uma outra flauta que é similar a sua mas possui comprimento diferente. Você e seu amigo começam a tocar suas flautas tapando os buracos em B e C de suas respectivas flautas. Os sons emitidos por essa outra flauta lhe parecem ser mais agudos que aqueles produzidos pela sua flauta. Qual o comprimento total da flauta que seu amigo está tocando uma vez que você consegue medir com precisão (usando um aparelho) uma diferença de tom igual a 75 Hz?

Solução Q3:

a) Quando tapamos B e C, o comprimento efetivo da primeira flauta é o seu comprimento total (segmento AD) de 0.4 m. Dessa forma, a frequência do modo fundamental da primeira flauta será (340 m/s)/(0,8 m) = 425 Hz.

b) Quando mantemos apenas o buraco B fechado, o comprimento efetivo da flauta é o segmento AC de 0,30 m, que define o nodo de pressão (ou um ventre de deslocamento). Assim, a frequência do modo fundamental será nesse caso igual a (340 m/s)/(0,6 m)=566,7 Hz.

c) Quando não tapamos os buracos em B e C, o tamanho efetivo da flauta é dado pelo segmento AB de 0.2 m, que define o nodo de pressão. Dessa forma, a frequência do modo fundamental será (340 m/s)/(0,4 m) = 850 Hz.

d) A frequência do modo fundamental da primeira flauta com os buracos B e C fechados é 425 Hz. É dito no problema que a segunda flauta tem formato semelhante à primeira (com comprimento diferente) mas os sons produzidos por ela são mais agudos, o que significa que as frequências da segunda flauta devem ser maiores do que as da primeira. Como a velocidade do som não muda e os buracos em B e C estão tapados, se quando a outra flauta é tocada um batimento de 75 Hz é detectado, isso significa que a frequência do modo fundamental da segunda flauta deve ser 425+75 = 500 Hz. Com essa frequência, o comprimento total da segunda flauta deve ser igual a (340 m/s)/(1000 Hz) = 0,34 m.

Q4 - Uma linha inteira de carros da marca Tabajara saiu com defeito de fabricação, emitindo um ruído harmônico de baixa frequência de 60 Hz e amplitudes idênticas. Um motorista A em um carro silencioso e sem defeito viajava tranquilamente em uma estrada deserta e retilínea com velocidade $v_A = 15$ m/s quando de repente, à sua frente, dois carros Tabajara aparecem, um na mesma pista do motorista A com velocidade $v_B = 15$ m/s e outro na pista contrária com velocidade $v_C = 5$ m/s (tanto v_B como v_C são dados em módulo). A estrada situa-se em uma região onde a velocidade do som é de $v_S = 305$ m/s.

(a) [0,5] Calcule a frequência do ruído f_{AB} que chega ao motorista A vindo do carro Tabajara B.

(b) [0,5] Calcule a frequência do ruído f_{AC} que chega ao motorista A vindo do carro Tabajara C **antes** que esses carros se cruzem.

(c) [0,5] Calcule a frequência do ruído f'_{AC} que chega ao motorista A vindo do carro Tabajara C **após** esses carros se cruzarem.

(d) [1,0] Calcule a frequência e o período do batimento no ruído resultante ouvido pelo motorista A **ainda antes** dos carros A e C se cruzarem. Justifique, fazendo um esboço deste ruído em função do tempo.

Solução Q4:

(a) O observador (motorista A) está de encontro com a onda sonora, emitida por uma fonte que se afasta (Tabajara B). Pela fórmula do efeito Doppler temos

$$f_{AB} = f_0 \frac{(v_S + v_A)}{(v_S + v_B)} = 60\,\frac{(305+15)}{(305+15)} = \frac{60 \times 320}{320} = 60 \text{ Hz}\,.$$

(b) O observador (motorista A) está de encontro com a onda sonora, emitida por uma fonte que se aproxima (Tabajara C). Pela fórmula do efeito Doppler temos

$$f_{AC} = f_0 \frac{(v_S + v_A)}{(v_S - v_C)} = 60\,\frac{(305+15)}{(305-5)} = \frac{60 \times 320}{300} = 64 \text{ Hz}\,.$$

(c) O observador (motorista A) agora está se afastando da onda sonora, emitida por uma fonte que se afasta (Tabajara C). Pela fórmula do efeito Doppler temos

$$f'_{AC} = f_0 \frac{(v_S - v_A)}{(v_S + v_C)} = 60.\frac{(305-15)}{(305+5)} = 60\frac{290}{310} = \frac{1740}{31} \text{ Hz}\,.$$

Logo $f'_{AC} = \frac{1740}{31} \approx 56,1 \text{ Hz} < f_0$

Para quaisquer valores de v_A e v_C a frequência f'_{AC} será menor que a frequência original.

(d) Dados $v_B = 15$ m/s e $v_C = 5$ m/s, o motorista A recebe as seguintes frequências:

$$f_{AB} = \frac{60 \times 320}{(305+15)} = 60 \text{ Hz} \qquad \text{e} \qquad f_{AC} = \frac{60 \times 320}{(305-5)} = \frac{320}{5} = 64 \text{ Hz}\,.$$

A amplitude de batimento é dada por

$$A(x,t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

onde a frequência de batimento é dada por

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\Delta\omega = f_{AC} - f_{AB} = 4 \text{ Hz}\,.$$

Um ciclo de batimento é, portanto, realizado a cada $T = \frac{1}{4} = 0,25$ segundos. Esse é o tempo entre duas amplitudes máximas de batimento (veja a figura abaixo).