FÍSICA I – 2020

DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

PRÓLOGO - Resultados anteriores relevantes

* Relações gerais para a dinâmica de sistemas de N corpos

$$\boxed{M\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{(ext)}$$

Centro de massa: $\vec{R} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \Longrightarrow \vec{P} = M\dfrac{d\vec{R}}{dt}$

Independência de forças internas $\leftrightarrow$ 3ª lei de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}} \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \vec{\tau}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(ext)}$$

Independência de forças internas $\leftrightarrow$ 3ª lei
forças centrais

$\vec{L}$ e $\vec{\tau}^{(ext)}$ dependem da escolha da origem para os $\vec{r}_i$!

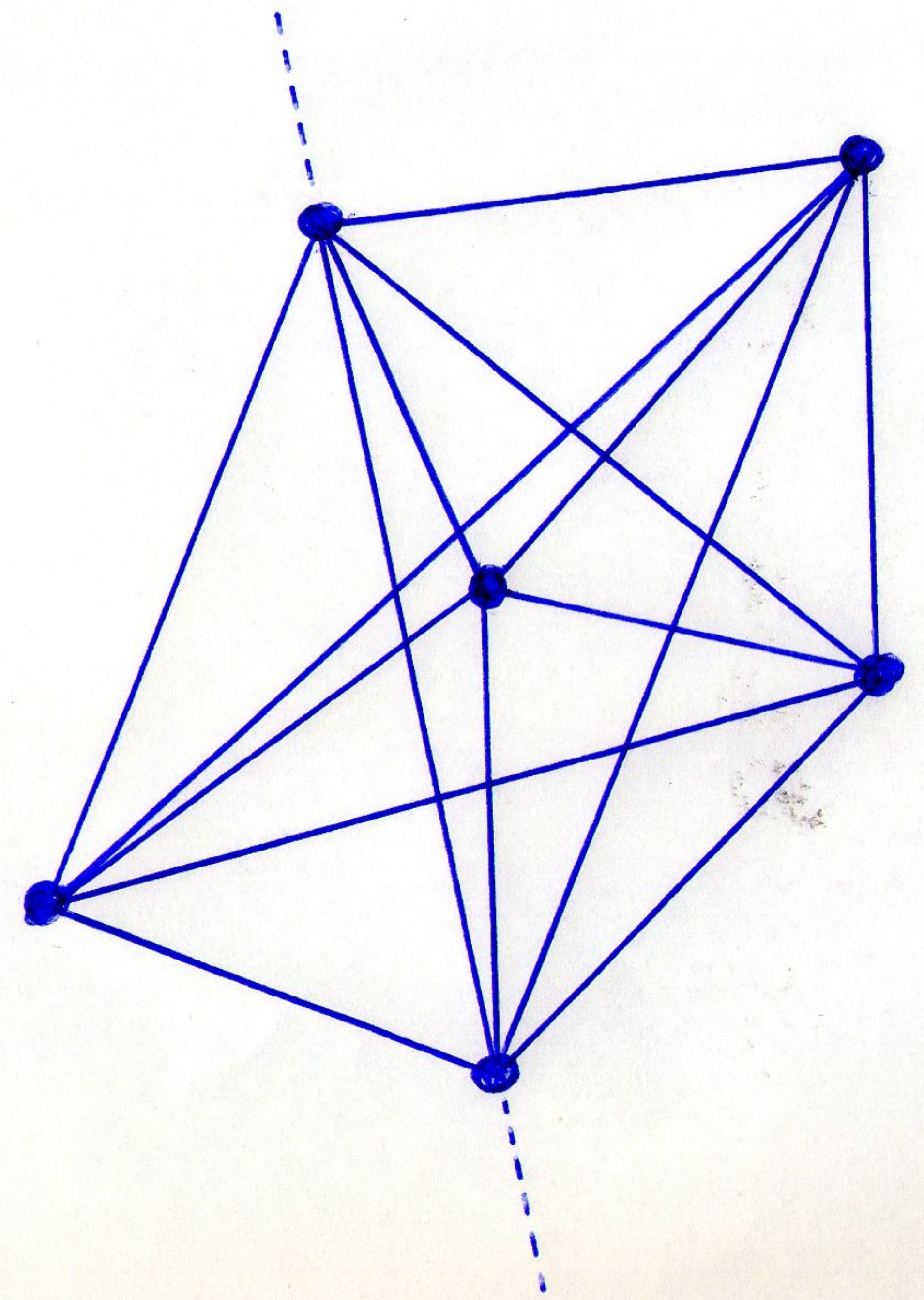
* Corpo rígido - $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ fixos, quaisquer i, j de 1 a N

Simplificação brutal da cinemática

$\downarrow$

de 3N a 6 graus de liberdade

A SEGUIR - Aspectos da dinâmica de corpos rígidos



Corpo rígido: todas as posições relativas fixas

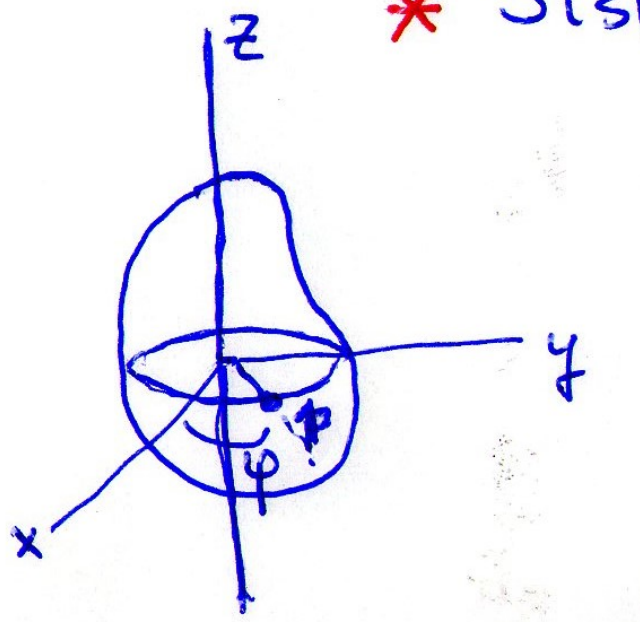
* Posição determinada completamente pelas coordenadas de 3 pontos não colineares

* As 9 coordenadas não são independentes: as distâncias entre cada dois pontos é fixa
⟹ 3 "relações subsidiárias"

∴ 6 graus de liberdade (9-3)

* Eixo fixo: determinado fixando dois pontos (6 coordenadas) com uma "condição subsidiária": 6-1 = 5 dos 6 graus de liberdade fixados
⟹
um único grau de liberdade livre para dinâmica

CORPO RÍGIDO com EIXO FIXO: $\boxed{\text{dinâmica}}$



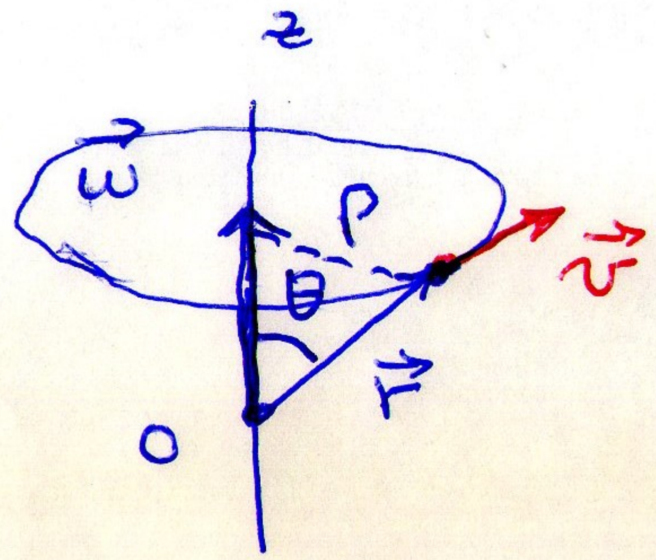
* Sistema com apenas UM grau de liberdade

  * Movimento possível: rotação em torno do eixo (z) descrita pelo ângulo $\varphi(t)$

  * $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ (em geral $\omega(t)$!) → velocidade angular

  * Representação vetorial: $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\hat{z}$

    Velocidade em um ponto dado pelo vetor de posição $\vec{r}$:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}| = \omega r \operatorname{sen}\theta = \omega\rho$$

* Equações relevantes para a dinâmica:

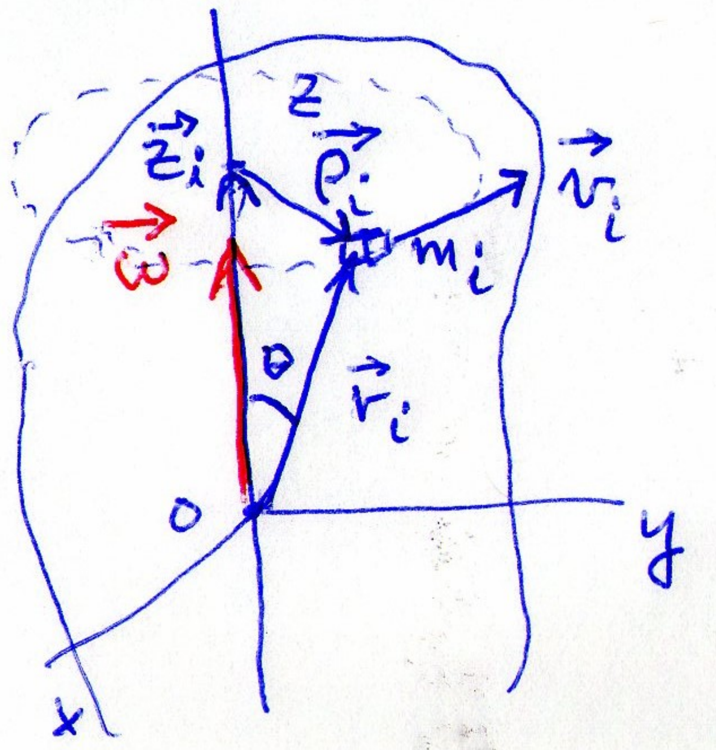
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}$$

  * "Mais relevante" neste caso unidimensional

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \tau_z^{(ext)}}$$

Outras equações e componentes: ANALISAR DEPOIS! (Hoje)

Implementação de $\boxed{\dfrac{dL_z}{dt} = \tau_z^{(ext)}}$



$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$|\vec{v}_i| = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \omega r_i \operatorname{sen}\theta = \omega \rho_i$; $\boxed{\vec{v}_i \perp \vec{\rho}_i}$

$\boxed{L_z} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \left[(\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) \times m_i \vec{v}_i \right]_z =$

$\vec{r}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

$= \underbrace{\sum_i (\vec{z}_i \times m_i \vec{v}_i)_z}_{=0} + \sum_i (\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i)_z =$

$\boxed{= \sum_i m_i \rho_i^2 \omega}$

<u>Def</u>: $\sum_i m_i \rho_i^2 \equiv I$ Momento de Inércia com relação ao eixo z

$L_z = I\omega \qquad \dfrac{dL_z}{dt} = I \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{I \dfrac{d\omega}{dt} = \tau_z^{ext}}$ cf. 2ª lei de Newton

* I depende da distribuição de massa e geometria do corpo rígido (e do eixo escolhido, claro)

* "subproduto": energia cinética de rotação em torno do eixo z do CR: $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2$

isto é $\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$

* Outras relações análogas ao movimento em 1 dimensão:

* $$I\frac{d\omega}{dt} = \tau_z^{ext} \longrightarrow I\omega\frac{d\omega}{dt} = \omega\tau_z^{ext}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{I\omega^2}{2}}_{\text{taxa de variação da energia cinética de rotação}} = \underbrace{\omega\tau_z^{ext}}_{\text{potência dispendida pelo torque}}$$

* Se $\tau_z^{ext} = 0$, a energia cinética de rotação é constante

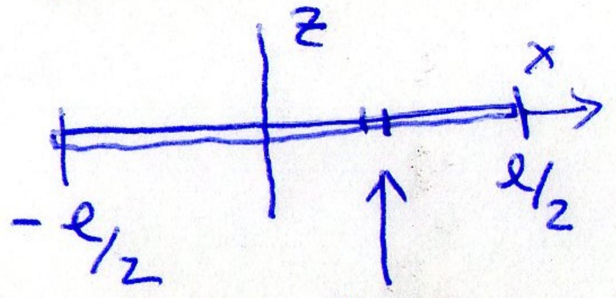
* $\boxed{\text{Trabalho}}$ $= \text{potência} \times dt = \tau_z^{ext}\,\omega\, dt = \tau_z^{ext}\frac{d\varphi}{dt}dt$

$$= \boxed{\tau_z^{ext}\, d\varphi}$$

O papel saliente do momento de inércia I justifica o

PARÊNTESE TÉCNICO – Cálculo de I para diferentes geometrias, eixos, etc.

* Alguns (poucos) exemplos

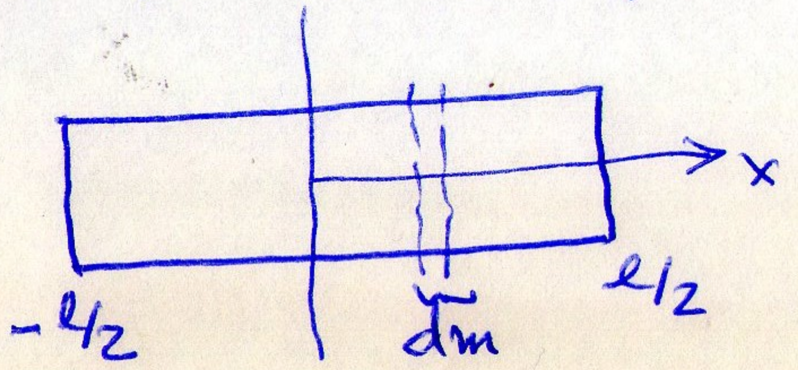
1) 

Barra delgada de comprimento ℓ, massa m
Eixo pelo centro da barra, perpendicular a ela

$dm = \frac{m}{\ell}dx$

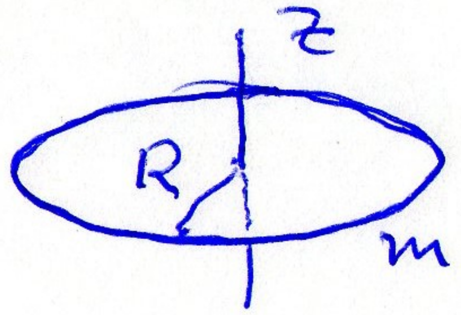
$$\boxed{I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell} x^2 dx = \frac{m}{\ell}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{8}+\frac{\ell^3}{8}\right) = \frac{m\ell^2}{12}}$$

Obs: Extensão direta p/ uma placa retangular no plano xz



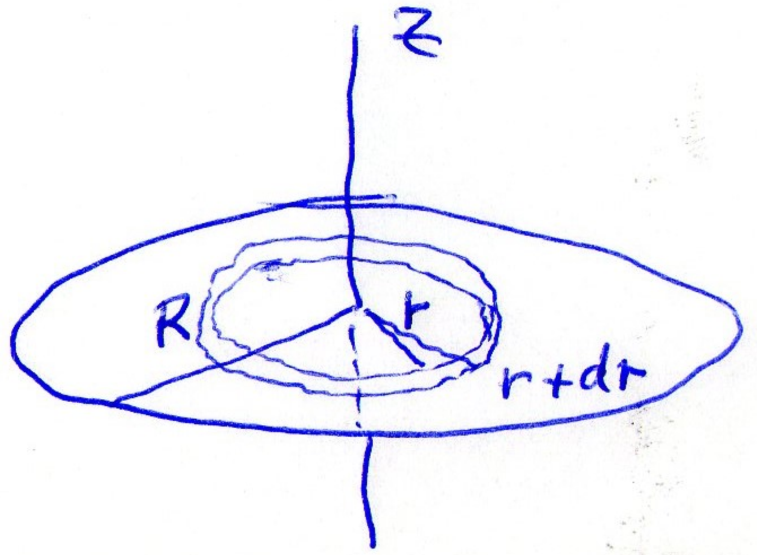
$dm = \frac{m}{\ell}dx$, etc.

2) Anel circular delgado de raio R, massa m
Eixo pelo centro do anel, perpendicular ao plano do anel



$\boxed{I = mR^2}$ (óbvio!)

3) Disco circular delgado, raio R, massa m
Eixo pelo centro do disco, perpendicular a ele.



O disco pode ser decomposto em anéis concêntricos de raio r e largura dr: massa do anel é

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} \times 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$$

$$\left[I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^2 \times r dr = \frac{2m}{R^2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \boxed{\frac{1}{2} m R^2} \right.$$

Obs. Extensível, como no caso 1), a um cilindro de massa m e raio R girando em torno de seu eixo.

4) Esfera $\underbrace{}_{\text{uniforme}}$ de raio R, massa m, eixo ≡ diâmetro da esfera

2 caminhos (entre outros)

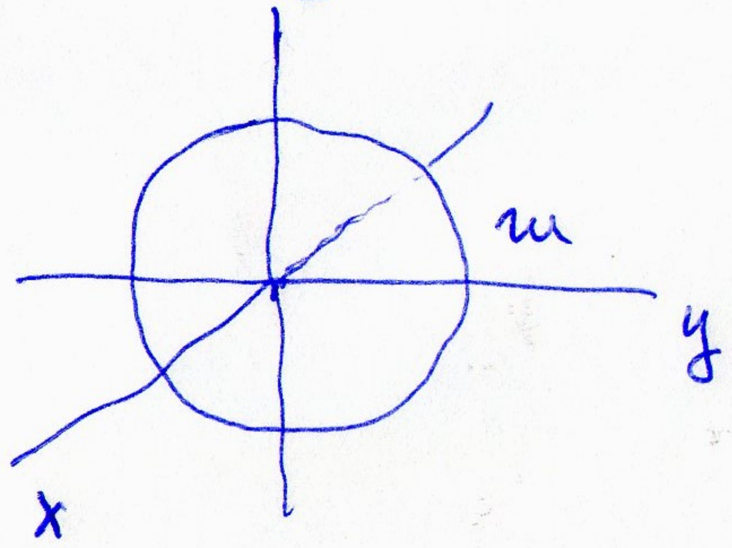
a) Esfera decomposta em pilha de discos. complicação: variação do raio dos discos com z

Em seguida, um atalho ⟹ para este caminho

b) Esfera decomposta em cascas esféricas (como cebola). Complicação: momento de inércia da casca esférica

5) (Para 4) b) acima) Casca esférica, massa m, raio R

Eixo: diâmetro da casca esférica



$$I_z = \int (x^2+y^2)\,dm \quad \text{(em torno do eixo } z)$$

$$I_y = \int (x^2+z^2)\,dm \quad \text{"} \quad y$$

$$I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \quad \text{"} \quad z$$

Mas $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{3}(I_x + I_y + I_z)$

$$I_x + I_y + I_z = \int (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)\,dm = 2R^2 \int dm = 2mR^2$$

logo $\boxed{I = I_z = \frac{2}{3} m R^2}$

6) Esfera (como cebola)

Raio R, eixo $\equiv$ diâmetro

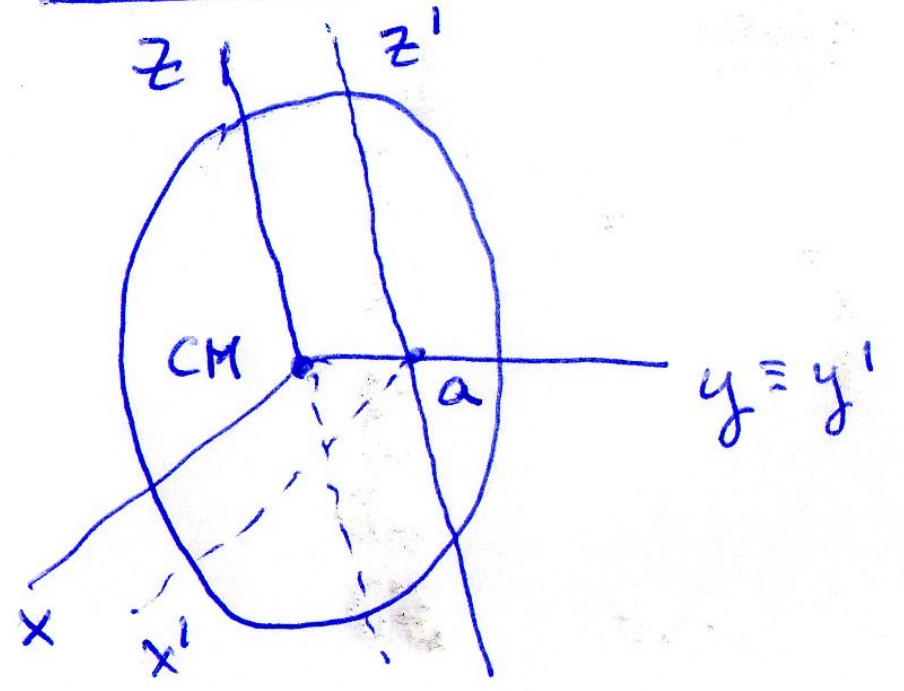
massa de cada camada $dm = \frac{3m}{4\pi R^3} 4\pi r^2 dr =$

$$= \frac{3m}{R^3} r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \underbrace{\frac{2}{3} \underbrace{\frac{3m}{R^3} r^2 dr}_{dm} \times r^2}_{dI \text{ (momento de inércia da camada)}} = \int_0^R \frac{2m}{R^3} r^4 dr = \boxed{\frac{2}{5} m R^2}$$

Ainda no parêntese técnico

* TEOREMA (!) dos eixos paralelos



Eixo z (passando pelo centro de massa)

$$I = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i$$

Eixo z' (paralelo a z, passando por $\begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$ sem perda de generalidade)

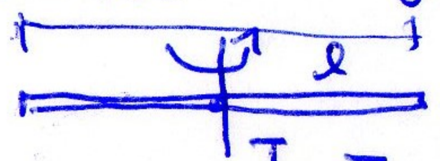
$$I' = \sum_i \left[x_i^2 + (y_i - a)^2\right] m_i =$$

$$= \underbrace{\sum_i \left[x_i^2 + y_i^2\right] m_i}_{I} + \underbrace{\sum_i m_i}_{M} a^2 - 2 \underbrace{\sum_i m_i y_i}_{0 \text{ (coord. y do CM)}} a$$

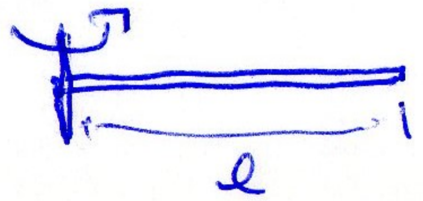
$$I' = I + Ma^2 \quad \Longleftarrow$$

I ↑ momento de inércia em torno de eixo paralelo ao eixo correspondente a I' e passando pelo centro de massa

Ex: ~~barra~~ barra delgada girando em torno de uma extremidade



$I = ml^2/12$



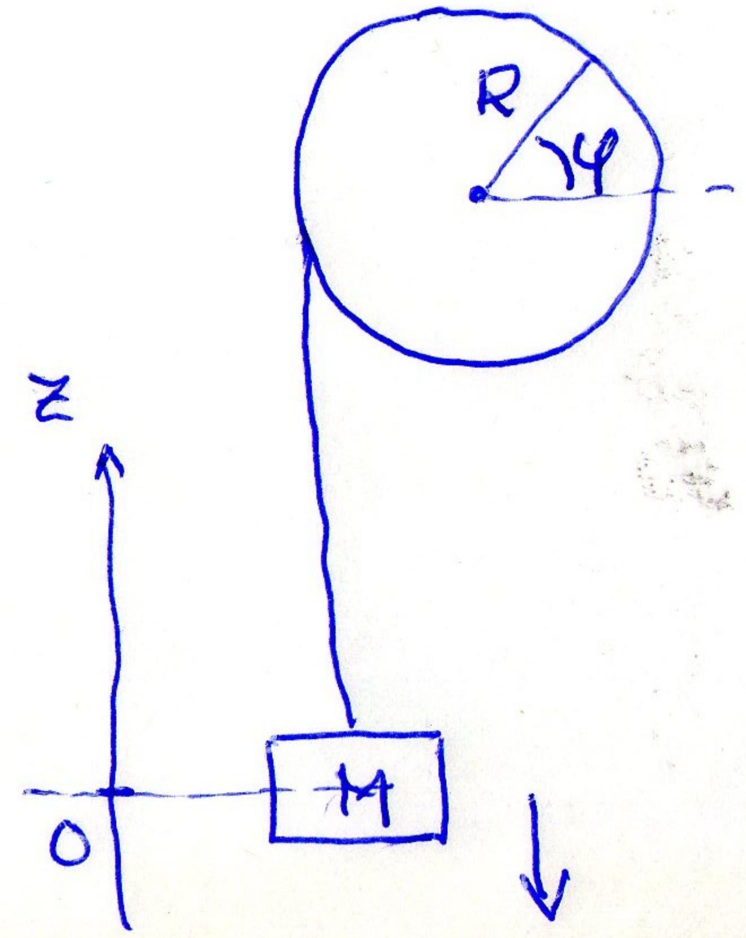
$$\boxed{I' = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}}$$

Exemplo - Roldana com fio enrolado puxado por pêso

↑ Momento de Inércia I

↑ $-Mg$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0 \longrightarrow \vec{\omega}$ para cima na figura



Vínculo cinemático: $\boxed{\omega R = -\frac{dz}{dt}}$

* Conservação de energia: $\frac{I}{2}\omega^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + Mgz = Const$

* Condição inicial: sistema parado com M em $z=0 \Rightarrow Const=0$

Usando o vínculo cinemático

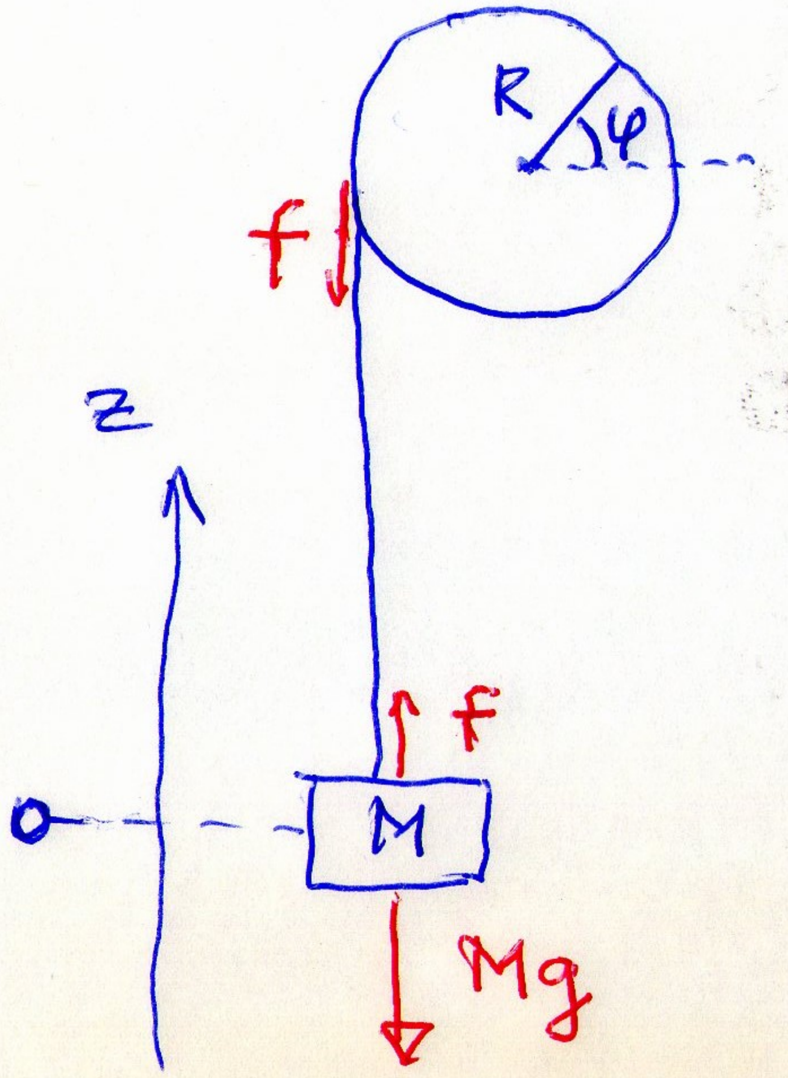
$$\left[\frac{I}{2} + \frac{M}{2}R^2\right]\omega^2 + Mgz = 0 \longrightarrow \boxed{\omega^2 = -\frac{2Mgz}{I+MR^2}}$$

Derivando essa relação no tempo

$$2\omega\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2Mg}{I+MR^2}\frac{dz}{dt} \overset{\text{vínculo cinemático}}{=} \frac{2Mg\omega R}{I+MR^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR}{I+MR^2}}$$

Derivando o vínculo cinemático $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{d\omega}{dt} = -\frac{MgR^2}{I+MR^2}}$

A mesma coisa em termos de forças



$$I\frac{d\omega}{dt} = Rf \qquad (f>0)$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = -Mg + f$$

Vínculo cinemático: $\omega R = -\frac{dz}{dt}$

$$\frac{d\omega}{dt}R = -\frac{d^2z}{dt^2}$$

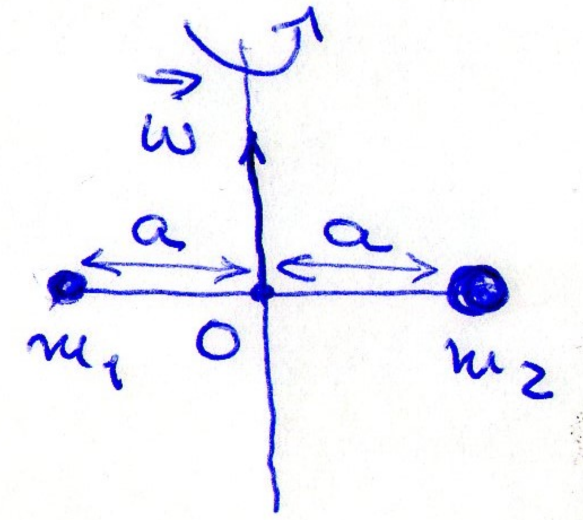
$$-MR\frac{d\omega}{dt} = -Mg + \frac{I}{R}\frac{d\omega}{dt}$$

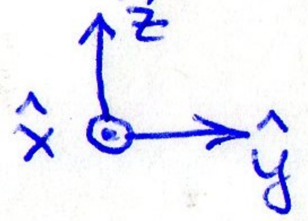
$$\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{I}{R} + MR\right) = Mg \longrightarrow \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR}{I+MR^2}}$$

usando mais uma vez o vínculo cinemático

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{MgR^2}{I+MR^2}}$$

OUTRAS COMPONENTES DE $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}$ e $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}$ EM UM EXEMPLO SIMPLES (e completamente explícito)





$\vec{r}_2 = a(\text{sen}\,\omega t\,\hat{x} + \cos\omega t\,\hat{y})$; $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$

a) $\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = (m_2 - m_1)a\omega(\cos\omega t\,\hat{x} - \text{sen}\,\omega t\,\hat{y})$

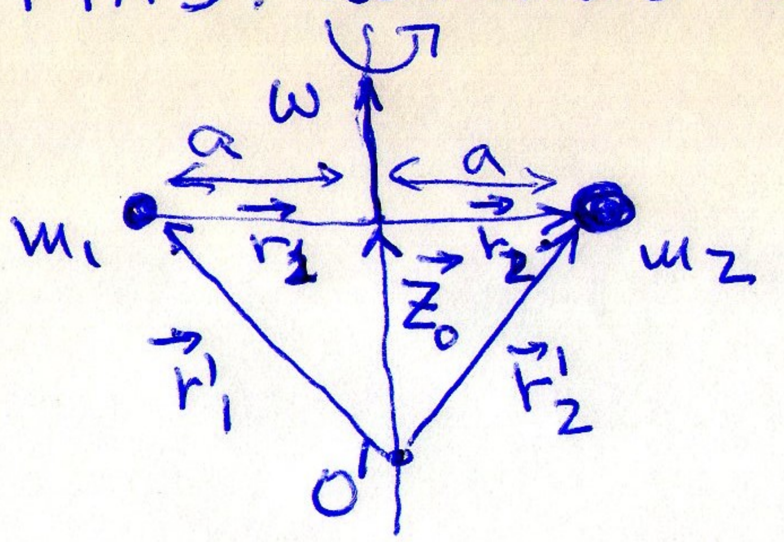
depende do tempo para $m_2 \neq m_1$!

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = -\underbrace{(m_2 - m_1)a}_{=(m_1+m_2)\times\text{distância do CM ao eixo}}\omega^2(\text{sen}\,\omega t\,\hat{x} + \cos\omega t\,\hat{y})$$

∴ $\vec{F}^{(ext)}$ é a força centrípeta necessária para fazer o CM girar em torno do eixo de rotação.

b) $\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\dot{\vec{r}}_2 = \omega a^2(m_1+m_2)\hat{z}$ logo $\vec{L} = L_z\hat{z}$ (constante) e $\vec{\tau}^{(ext)} = 0$

MAS: mudando O para O'



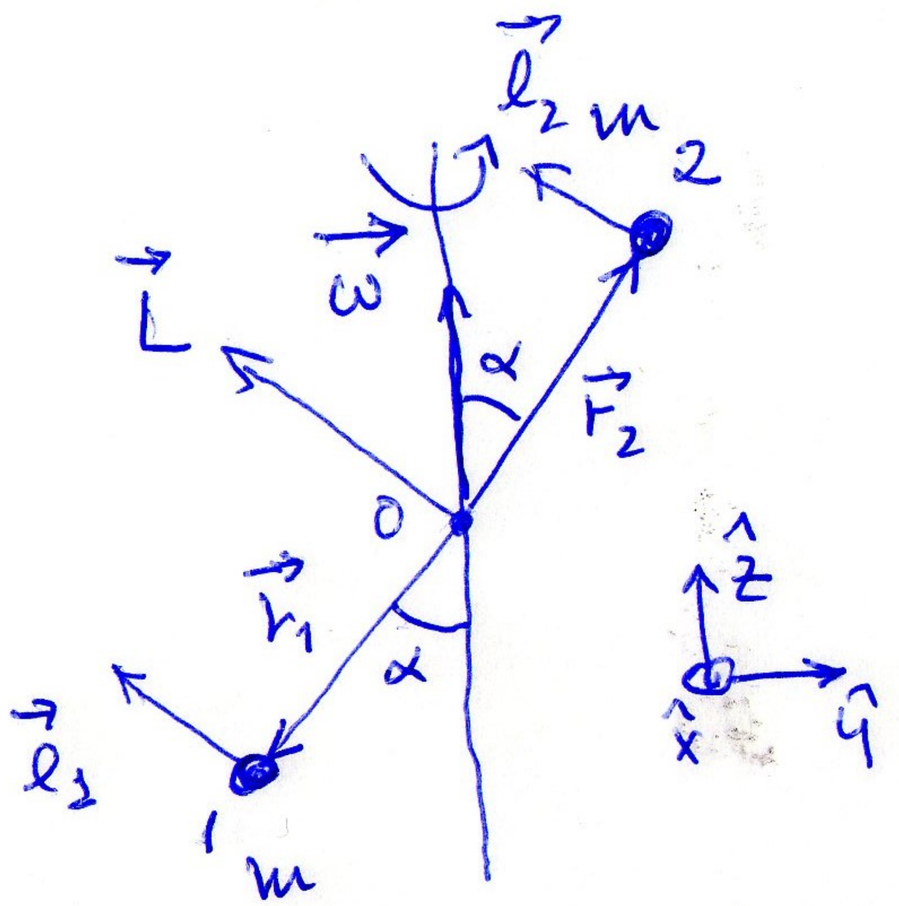
$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{Z}_0 \times (m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2) = \vec{L} + \vec{Z}_0 \times \vec{P}$$

então

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{=0} + \vec{Z}_0 \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{Z}_0 \times \vec{F}^{(ext)} = \vec{\tau}'^{(ext)}$$

↑ Torque da força centrípeta com relação a O'

* Torque externo total <u>sem</u> aceleração do CM



$\vec{r}_2 = a\,\text{sen}\,\alpha\,(\text{sen}\,\omega t\,\hat{x} + \cos\omega t\,\hat{y}) + a\cos\alpha\,\hat{z}$; $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$

a) $\vec{P} = m\dot{\vec{r}}_1 + m\dot{\vec{r}}_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = 0$

b) $\vec{L} = \vec{r}_1 \times m\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m\dot{\vec{r}}_2 \equiv \vec{l}_1 + \vec{l}_2$

(v. figura, mas é possível fazer a conta explicitamente)

$\vec{L} = L_z\,\hat{z} + \vec{L}_\perp(t)$

$L_z = \underbrace{2ma^2\,\text{sen}^2\alpha}_{I}\,\omega$

componente girante, velocidade angular ω

$\boxed{\text{Observação importante - Em geral, o momento angular do corpo rígido não é paralelo à velocidade angular } \vec{\omega}}$