Função constante, Função linear e Função afim

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Função constante

Definição

Seja $c \in \mathbb{R}$ fixado. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ é chamada de função constante igual a c.

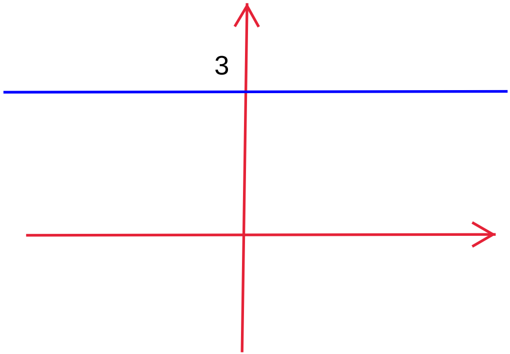
Obs:

1) O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo Ox passando pelo ponto $(0, c)$.

2) A imagem da função constante é $Im(f) = \{c\}$.

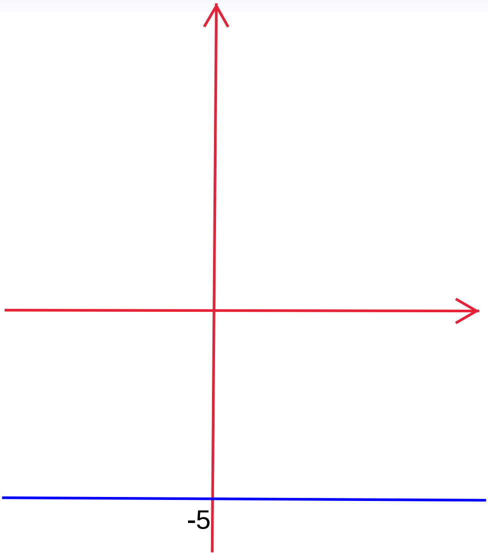
Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3.$



Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -5.$



Função linear

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax$ *é chamada de função linear.*

Obs:

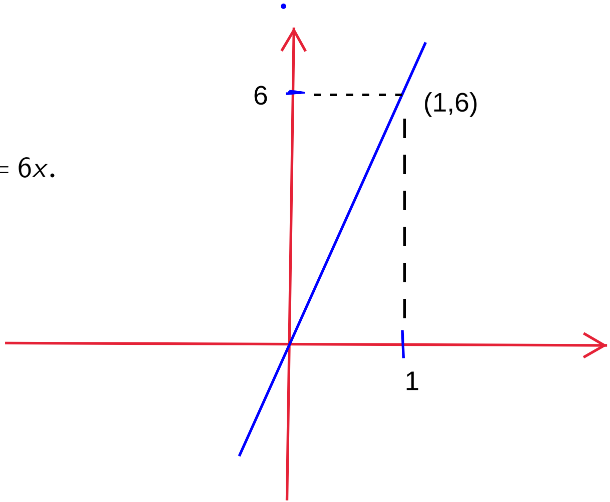
1) O gráfico da função linear é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$.

2) A imagem da função linear é $Im(f) = \mathbb{R}$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y}{a}$ tal que $f(x) = ax = a\frac{y}{a} = y$.

3) A função linear $f(x) = x$ é chamada função identidade.

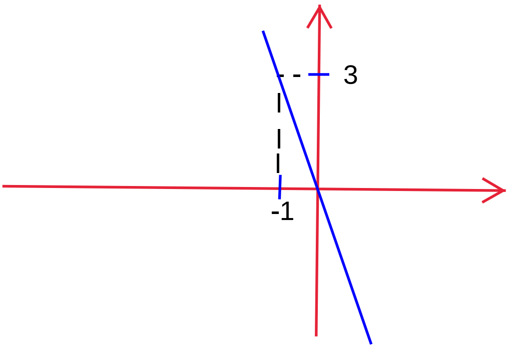
Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 6x.$



Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$.



Função afim

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *fixados. Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax + b$ *é chamada de função afim.*

Obs:

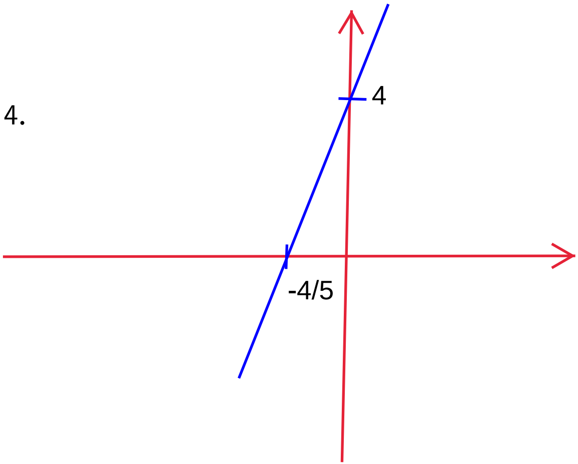
1) Toda função linear $f(x) = ax$ é uma função afim com $b = 0$.

2) O gráfico da função afim é a reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$, se $b \neq 0$.

3) O coeficiente a da função afim $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente angular da reta representada no plano cartesiano. O coeficiente b é chamado coeficiente linear.

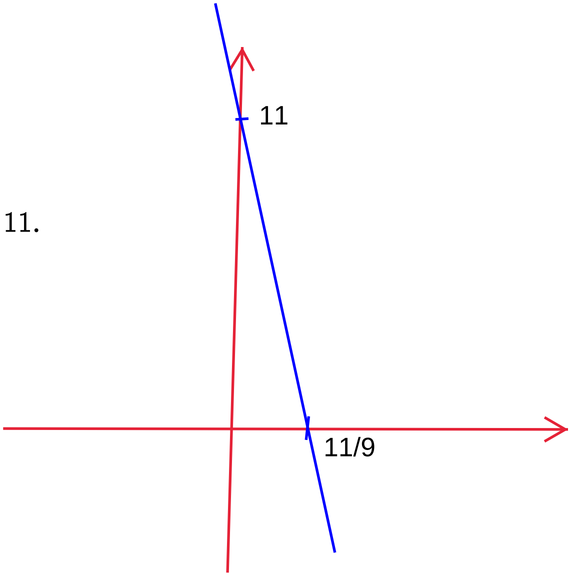
Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 4.$



Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -9x + 11$.



Exemplo

Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e tem coeficiente angular igual a -3.

Solução: A equação procurada é da forma $f(x) = ax + b$.
Temos que o coeficiente angular a é -3, isto é, $a = -3$ e daí $f(x) = -3x + b$.
Temos também que $(-2, 4)$ está no gráfico de f (na reta), isto é, $4 = f(-2) = -3(-2) + b = 6 + b$ o que implica $b = -2$. Portanto a equação procurada é $f(x) = -3x - 2$.

Exemplo

Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ *e tem coeficiente linear igual a* 4.

Solução: A equação procurada é da forma $f(x) = ax + b$.
Temos que o coeficiente linear b é 4, isto é, $b = 4$ e daí
$f(x) = ax + 4$.
Temos também que $(-2, 1)$ está no gráfico de f (na reta), isto é, $1 = f(-2) = a(-2) + 4 = -2a + 4$ o que implica $-2a = -3$ o que implica $a = \frac{3}{2}$. Portanto a equação procurada é $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$.

Exemplo

Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $(3,1)$ *e* $(0,5)$

Solução:

A equação procurada é da forma $f(x) = ax + b$.
Temos que $1 = f(3) = 3a + b$ e $5 = f(0) = b$, o que implica, $3a + 5 = 1$, que implica $3a = -4$ que implica $a = \frac{-4}{3}$. Portanto a equação procurada é $f(x) = \frac{-4}{3}x + 5$.

Teorema

Toda função afim é bijetora.

Demonstração:

Mostremos que f é injetora. De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$ temos que $ax_1 + b = ax_2 + b$ o que implica $ax_1 = ax_2$ o que implica $x_1 = x_2$.

Mostremos que f é sobrejetora. De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y-b}{a}$ tal que $f(x) = ax + b = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b = y$.

Função crescente e decrescente

Definição

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dizemos que f é crescente se , para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}$ *e* $x_2 \in \mathbb{R}$ *com* $x_1 < x_2$ *então* $f(x_1) < f(x_2)$.

Dizemos que f é decrescente se , para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}$ *e* $x_2 \in \mathbb{R}$ *com* $x_1 < x_2$ *então* $f(x_1) > f(x_2)$.

Obs: 1) Dizer que f é crescente é equivalente a dizer que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \quad \text{para quaisquer } x_1\ ,\ x_2 \text{ com } x_1 \neq x_2.$$

2) Dizer que f é decrescente é equivalente a dizer que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \quad \text{para quaisquer } x_1\ ,\ x_2 \text{ com } x_1 \neq x_2.$$

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ uma função afim. Então
1) f é crescente se e somente se $a > 0$,
2) f é decrescente se e somente se $a < 0$.

Dem: 1) $f(x)) = ax + b$ é crescente se e somente se

$$0 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

2) $f(x)) = ax + b$ é decrescente se e somente se

$$0 > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

Exemplo

1) $f(x) = 6x - 11$ *é crescente pois* $a = 6 > 0$.

2) $f(x) = -7x + 3$, *é decrescente pois* $a = -7 < 0$.