

LISTA 5

1) Deseja-se usar o algoritmo de rejeição para simular de uma v.a. normal positiva, cuja densidade é dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Foram propostas duas densidades:

- (i)  $g_1(x) = e^{-x}, x > 0$  (exponencial) e
- (ii)  $g_2(x) = xe^{-x}, x > 0$  (gama).

- a) Verifique a possibilidade de usar o algoritmo nas duas situações.
- b) No caso do algoritmo ser adequado, obtenha o número médio esperado de iterações.

2) Ônibus chegam a um evento esportivo de acordo com um PPH com taxa 5 por hora. Cada ônibus pode conter 20, 21, 22, ..., 40 torcedores com igual probabilidade, independentemente do ônibus.

- a) Descreva um algoritmo para simular o número de torcedores que chegam ao evento até o tempo  $t_0 = 1$  hora.
- b) Escreva um programa no **R** e obtenha 500 réplicas do processo, isto é, 500 valores da v.a. número de torcedores. Apresente o *box-plot* desses valores e as estatísticas resumos. Compare com o verdadeiro número esperado de torcedores.
- c) Obtenha o valor verdadeiro para variância do número de torcedores. Apresente uma estimativa dessa variância usando o programa anterior e compare.

3) Escreva um programa para gerar as primeiras 10 chegadas de um PPNH com função intensidade

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}.$$

Descreva o algoritmo, apresente os códigos do programa utilizados e os tempos de chegadas simulados.

4) Simule uma amostra de tamanho  $n$  de uma normal padrão, em que  $n$  é tal que:  $n \geq 100$  e  $\frac{s}{\sqrt{n}} < 0.05$ .

(a) Quantos valores você espera que sejam simulados? Quantos você simulou? Compare e comente.

(b) Apresente a média e a variância amostrais. Faça um histograma dos dados simulados e sobreponha a este a curva da normal padrão.

5) Para estimar  $\theta$  foram gerados 20 valores independentes de uma v.a. com média  $\theta$ . Quantas observações adicionais espera-se simular se deseja-se que a estimativa final não se distancie do verdadeiro valor de  $\theta$  por mais de 1 unidade e isso ocorra com probabilidade 0.99?

Os valores gerados foram: 102, 112, 131, 107, 114, 95, 133, 145, 139, 117, 93, 111, 124, 122, 136, 141, 119, 122, 151 e 143 .

6) Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a. independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$ . Para duas constantes tais que  $a < b$ , estamos interessados em estimar  $p = P[a < \bar{X} - \mu < b]$  .

(a) Explique como usar o método de *bootstrap* para estimar  $p$ .

(b) Considere  $n = 10, a = -5$  e  $b = 5$ . Estime  $p$  considerando que os valores observados são: 56, 101, 78, 67, 93, 87, 64, 72, 80 e 69.

7) Prove que o valor de  $\alpha$  que minimiza  $Var[\alpha X + (1 - \alpha)Y]$  é dado por

$$\hat{\alpha} = \frac{Var[X] - Cov[X, Y]}{Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X, Y]}$$

8) Considere o modelo de regressão linear simples  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$ . Sob a suposição de normalidade, independência e igual variância ( $\sigma^2$ ) para os erros, temos que

$$ep(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

(a) Use os dados do exemplo 2 dos slides da AulaAnáliseEstatística sobre notas das 15 turmas do curso de direito para ajustar um modelo de regressão considerando GPA como variável resposta e LSTA como explicativa. Determine a reta ajustada.

(b) Use o método de *bootstrap* para obter o erro padrão de  $\hat{\beta}_1$ . Compare o valor obtido com o erro padrão obtido pela expressão acima, substituindo  $\sigma$  pelo seu estimador usual  $S_x$ .

9) Prove que

$$EQM_{Jack}(\bar{X}) = \frac{S_x^2}{n}.$$

10) Suponha que trabalhos chegam a um sistema com um único servidor de acordo com um PPNH cuja taxa inicial é 4 por hora, depois aumenta constantemente até obter-se a taxa de 19 por hora depois de 5 horas. Então, decresce constantemente até obter-se a taxa de 4 por hora depois de mais 5 horas adicionais. Assim, o processo continua sucessivamente de forma que  $\lambda(t + 10) = \lambda(t)$ . Suponha que o tempo de serviço tem distribuição exponencial com taxa 25 por hora. Implemente um programa para determinar o tempo médio em que o servidor não estará operando nas primeiras 100 horas, ou seja, quando não existe trabalho na fila.