

CAPÍTULO 9

PREVISÃO COM MODELOS ARIMA

INTRODUÇÃO

Seguindo o ciclo iterativo de identificação, estimação e diagnóstico, nosso objetivo será o de fazer previsões.

Estaremos interessados em prever um valor Z_{t+h} , $h \geq 1$, supondo que temos observações... Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t , até o instante t , chamado “origem” das previsões.

Denotaremos $\hat{Z}_t(h)$ a previsão de origem t e horizonte h . Ademais, $W_t = \Delta^d Z_t$ é suposto ser estacionário e invertível, e os parâmetros do modelo são conhecidos.

Lembremos que o modelo $\text{ARIMA}(p, d, q)$ pode ser escrito de três formas:

- i. forma de equação de diferenças; (cálculo de previsões)

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \cdots + \varphi_{p+d} Z_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

onde $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_{p+d} B^{p+d}$.

- ii. forma de choques aleatórios; (cálculo de variância dos erros de previsão)

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots = \psi(B) a_t$$

- iii. forma invertida;

$$\pi(B)Z_t = [1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j]Z_t = a_t$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t$$

Substituindo $t + h$ em t , temos:

i. forma de equação de diferenças

$$Z_{t+h} = \varphi_1 Z_{t+h-1} + \cdots + \varphi_{p+d} Z_{t+h-p-d} + a_{t+h} - \theta_1 a_{t+h-1} - \cdots - \theta_q a_{t+h-q}$$

ii. forma de choques aleatórios

$$Z_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^{t+h} \psi_{t+h-j} a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j},$$

onde $\psi_0 = 1$.

iii. forma invertida

$$Z_{t+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t+h-j} + a_{t+h}$$

PREDIÇÃO DE EQM MÍNIMO

Vamos supor que $\hat{Z}_t(h) = \psi_h^* a_t + \psi_{h+1}^* a_{t-1} + \psi_{h+2}^* a_{t-2} + \cdots$ é a melhor previsão

dada por:

$$\hat{Z}_t(h) = \psi_h^* a_t + \psi_{h+1}^* a_{t-1} + \psi_{h+2}^* a_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j}^* a_{t-j}$$

O objetivo é determinar os $\psi_j^{*'}s$ que minimizem o EQM de previsão

dado por:

$$E[Z_{t-h} - \hat{Z}_t(h)]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j}^* a_{t-j}\right]^2$$

O erro de previsão $e_t(h)$ é dado por:

$$\begin{aligned} e_t(h) &= Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h) \\ &= \psi_0 a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \cdots + \psi_{h-1} a_{t+1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*) a_{t-j} \\ e_t(h) &= \sum_j \psi_j a_{t+h-j} - \sum_j \psi_{h+j}^* a_{t-j} \\ &= \psi_0 a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \psi_2 a_{t+h-2} + \psi_3 a_{t+h-3} + \cdots - \psi_h^* a_t \\ &\quad - \psi_{h+1}^* a_{t-1} - \psi_{h+2}^* a_{t-2} - \psi_{h+3}^* a_{t-3} - \cdots \end{aligned}$$

Para h=1:

$$\begin{aligned} e_t(1) &= \psi_0 a_{t+1} + \psi_1 a_t + \psi_2 a_{t-1} + \psi_3 a_{t-2} + \cdots - \psi_1^* a_t - \psi_2^* a_{t-1} - \psi_3^* a_{t-2} \\ &\quad - \psi_4^* a_{t-3} - \cdots = \psi_0 a_{t+1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*) a_{t-j} \end{aligned}$$

Para h=2:

$$\begin{aligned} e_t(2) &= \psi_0 a_{t+2} + \psi_1 a_{t+1} + \psi_2 a_t + \psi_3 a_{t-1} + \psi_4 a_{t-2} + \cdots - \psi_2^* a_t - \psi_3^* a_{t-1} \\ &\quad - \psi_4^* a_{t-2} - \cdots = \psi_0 a_{t+2} + \psi_0 a_{t+1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*) a_{t-j} \end{aligned}$$

.

.

.

De forma geral:

$$e_t(h) = \psi_0 a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \cdots + \psi_{h-1} a_{t+1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*) a_{t-j}$$

Portanto:

$E[e_t(h)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2)\sigma_a^2 + \sum (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*)^2 \sigma_a^2$, visto que os a_t 's são não correlacionados e $\psi_0 = 1$.

Note que $E[e_t(h)]^2$ é minimizado quando $\psi_{h+j} = \psi_{h+j}^*, j = 1, 2, \dots$ e h fixo.

Portanto, a previsão de EQM mínimo é dado por:

$$\hat{Z}_t(h) = \psi_h a_t + \psi_{h+1} a_{t-1} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j} a_{t-j}$$

Por sua vez, o erro de previsão é dado por:

$$e_t(h) = a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \dots + \psi_{h-1} a_{t+1}$$

Temos ainda que:

$$Z_{t+h} = e_t(h) + \hat{Z}_t(h); \quad h \geq 1$$

Vamos denotar por:

$$[Z_{t+h}] = E[Z_{t+h} | Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots]$$

Desta forma temos que:

- i. $\hat{Z}_t(h) = [Z_{t+h}]$, ou seja, a previsão de EQM mínimo é a esperança condicional de Z_{t+h} , dadas as observações passadas da série;
- ii. $E[e_t(h)] = 0$ e a variância do erro de previsão é dado por:

$$V(h) = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2)\sigma_a^2$$

- iii. O erro de previsão da um passo é:

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = a_{t+1}$$

Ou seja, erros de previsão a um passo são não correlacionados.

- iv. Porém, erros de previsão para intervalos maiores de tempo serão correlacionados;

FORMAS BÁSICAS DE PREVISÃO

- i. Previsão utilizando a equação de diferenças

Tomando a esperança condicional na equação:

$Z_{t+h} = \varphi_1 Z_{t+h-1} + \dots + \varphi_{p+d} Z_{t+h-p-d} - \theta_1 a_{t+h-1} - \dots - \theta_q a_{t+h-q} + a_{t+h}$, temos:

$$\hat{Z}_t(h) = \varphi_1 [Z_{t+h-1}] + \dots + \varphi_{p+d} [Z_{t+h-p-d}] - \theta_1 [a_{t+h-1}] - \dots - \theta_q [a_{t+h-q}] + [a_{t+h}], \text{ para } h \geq 1.$$

Observe ainda que:

$$[Z_{t+k}] = \hat{Z}_t(k), k > 0$$

$$[Z_{t+k}] = \hat{Z}_{t+k}, k \leq 0$$

$$[a_{t+k}] = 0, k > 0$$

$$[a_{t+k}] = a_{t+k}, k \leq 0$$

Observações:

- Note que os termos de médias móveis desaparecem para $h > q$;
- Para calcular $\hat{Z}_t(h)$ precisamos de $\hat{Z}_t(h-1); \hat{Z}_t(h-2), \dots$ que são calculados recursivamente;
- Note que, na prática, teremos um número finito de dados passados, portanto a previsão $E(Z_{t+h}|Z_t \dots Z_1)$ será uma aproximação de $E(Z_{t+h}|Z_t, Z_{t-1}, \dots)$. No entanto, as duas aproximam-se para t grande.

- d) As previsões de um modelo AR(p) são exatas, uma vez que pode ser demonstrada a seguinte igualdade:

$$E(Z_{t+h}|Z_t, Z_{t-1}, \dots) = E(Z_{t+h}|Z_t \dots Z_{t+1-p})$$

- e) As inovações a_t são calculadas recursivamente;

Obs: O que importa são os coeficientes que influenciam na autocorrelação → nesse caso ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e θ_1 para previsão.

Exemplo 9.1: Considere um modelo ARIMA(3,1,1):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1 - B)Z_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

Então:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1 - B)Z_{t+h} = (1 - \theta_1 B)a_{t+h}$$

$$(1 - B - \phi_1 B + \phi_1 B^2 - \phi_2 B^2 + \phi_2 B^3 - \phi_3 B^3 + \phi_3 B^4)Z_{t+h} = (1 - \theta_1 B)a_{t+h}$$

$$[1 - (1 + \phi_1)B + (\phi_1 - \phi_2)B^2 + (\phi_2 - \phi_3)B^3 + \phi_3 B^4]Z_{t+h} = (1 - \theta_1 B)a_{t+h}$$

$$Z_{t+h} = (1 + \phi_1)Z_{t+h-1} - (\phi_1 - \phi_2)Z_{t+h-2} - (\phi_2 - \phi_3)Z_{t+h-3} - \phi_3 Z_{t+h-4} + a_{t+h} - \theta_1 a_{t+h-1}$$

Para $h=1,2,3,\dots$, temos que

$$Z_t(1) = (1 + \phi_1)Z_t - (\phi_1 - \phi_2)Z_{t-1} - (\phi_2 - \phi_3)Z_{t-2} - \phi_3 Z_{t-3} - \theta_1 a_t$$

$$Z_t(2) = (1 + \phi_1)\hat{Z}_t(1) - (\phi_1 - \phi_2)Z_t - (\phi_2 - \phi_3)Z_{t-1} - \phi_3 Z_{t-2}$$

$$Z_t(3) = (1 + \phi_1)\hat{Z}_t(2) - (\phi_1 - \phi_2)\hat{Z}_t(1) - (\phi_2 - \phi_3)Z_t - \phi_3 Z_{t-1}$$

$$Z_t(4) = (1 + \phi_1)\hat{Z}_t(3) - (\phi_1 - \phi_2)\hat{Z}_t(2) - (\phi_2 - \phi_3)\hat{Z}_t(1) - \phi_3 Z_t$$

$$Z_t(h) = (1 + \phi_1)\hat{Z}_t(h-1) - (\phi_1 - \phi_2)\hat{Z}_t(h-2) - (\phi_2 - \phi_3)\hat{Z}_t(h-3) - \phi_3 Z_t(h-4); h \geq 5$$

ii. Previsão utilizando a forma de choques aleatórios da equação

$$Z_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^{t+h} \psi_{t+h-j} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}, \text{ temos:}$$

$$\hat{Z}_t(h) = \psi_1[a_{t+h-1}] + \psi_2[a_{t+h-2}] + \cdots + \psi_{h-1}[a_{t-1}] + \psi_h[a_t] + \cdots + [a_{t+h}]$$

Exemplo 9.2: O modelo MA(1), dado por:

$$Z_t = \theta_0 + (1 - \theta B)a_t$$

Já está escrito na forma descrita acima. A diferença é que a constante está incluída no modelo. Assim:

$$\hat{Z}_t(h) = \theta_0 + [a_{t+h}] - \theta[a_{t+h-1}]$$

Para $h=1$, temos:

$$\hat{Z}_t(1) = \theta_0 - \theta a_t$$

Para $h=2$:

$$\hat{Z}_t(2) = \theta_0$$

E, segue que, $\hat{Z}_t(h) = \theta_0$, para $h \geq 2$. Ou seja, a partir de $h = 2$, a previsão coincide com a constante da série.

Generalizando, em um modelo MA(q), as previsões coincidem com a constante para $h > q$.

iii) Previsão utilizando a forma invertida da equação $Z_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^{t+h} \psi_{t+h-j} a_j =$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}, \text{ obtemos: } \hat{Z}_t(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [Z_{t+h-j}] + [a_{t+h}]$$

Exemplo 9.3: Considere o modelo MA(1) sem constante:

$$Z_t = (1 - \theta B)a_t$$

$$(1 - \theta B)^{-1}Z_t = a_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\theta B)^i Z_t = a_t$$

De modo que:

$$Z_t = a_t - \theta Z_{t-1} - \theta^2 Z_{t-2} - \theta^3 Z_{t-3} - \dots$$

Ainda:

$$Z_{t+h} = a_{t+h} - \theta Z_{t+h-1} - \theta^2 Z_{t+h-2} - \dots$$

Segue que a previsão de Z_{t+h} , feita no instante t , será dado por:

$$\hat{Z}_t(h) = -\theta Z_t(h-1) - \theta^2 \hat{Z}_t(h-2) - \dots$$

ou seja,

$$\hat{Z}_t(h) = \sum_{j=1}^{\infty} -\theta^j \hat{Z}_t(h-j), h > 0$$

EQUAÇÃO DE PREVISÃO

De acordo com i) a equação de previsão; que é função de h , com origem em t

fixo, satisfaz a seguinte equação de diferenças:

$$\hat{Z}_t(h) = \sum_{i=1}^{p+d} \varphi_i \hat{Z}_t(h-i), h > q$$

Ou

$$\varphi(B)\hat{Z}_t(h) = (1 - B)^d \phi(B)\hat{Z}_t(h) = 0, \quad h > q$$

com $\varphi(B)$ operando sobre h .

Temos que, para $h > q - p - d$, a função $\hat{Z}_t(h)$ consistirá em uma mistura de polinômios, exponenciais e senóides amortecidas, com sua forma determinada pelas raízes G_i^{-1} do operador $\varphi(B) = 0$.

A solução geral será dada por:

$$\hat{Z}_t(h) = c_1^{(t)} f_1(h) + c_2^{(t)} f_2(h) + \dots + c_{p+d}^{(t)} f_{p+d}(h), \quad h > q - p - d,$$

onde $f_i(h)$, $h = 1, \dots, p + d$, são funções de h e $c_1^{(t)}, \dots, c_{p+d}^{(t)}$ são coeficientes adaptativos, ou seja, dependem da origem t de previsão e são determinados por $\hat{Z}_t(1), \hat{Z}_t(2), \dots, \hat{Z}_t(p + d)$.

Exemplo 9.4: Considere o modelo ARIMA(0,1,1) com termo constante:

$$(1 - B)Z_t = \theta_0 + a_t - \theta a_{t-1}$$

então:

$$Z_t = \theta_0 + Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

segue que:

$$Z_{t+h} = \theta_0 + Z_{t+h-1} + a_{t+h} - \theta a_{t+h-1}$$

a equação de previsão fica

$$\hat{Z}_t(h) = \theta_0 + \hat{Z}_t(h-1) + [a_{t+h}] - \theta[a_{t+h-1}]$$

Para $h=1,2,\dots$ temos:

$$\hat{Z}_t(1) = \theta_0 + Z_t - \theta a_t$$

$$\hat{Z}_t(2) = \theta_0 + \hat{Z}_t(1) = \theta_0 + (\theta_0 + Z_t - \theta a_t) = 2\theta_0 + Z_t - \theta a_t$$

em geral:

$$\hat{Z}_t(h) = (h-1)\theta_0 + \hat{Z}_t(1), \quad h \geq 1$$

ou ainda:

$$\hat{Z}_t(h) = Z_t + h\theta_0 - \theta a_t, h \geq 1$$

Podemos observar por $\hat{Z}_t(h) = (h-1)\theta_0 + \hat{Z}_t(1)$ que a função de previsão é uma reta com intercepto adaptativo, $\hat{Z}_t(1)$, e inclinação θ_0 .

[GRÁFICO 1]

No caso em que $\theta = 0$ (passeio aleatório) temos:

$$\hat{Z}_t(h) = Z_t + h\theta_0, h \geq 1$$

Exemplo 9.5 Considere o modelo ARIMA (0,1,1) sem o termo constante, dado por:

$$(1-B)Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$Z_{t+h} = Z_{t+h-1} + a_{t+h} - \theta a_{t+h-1}$$

$$\hat{Z}_t(h) = \hat{Z}_t(h-1) + [a_{t+h}] - \theta[a_{t+h-1}]$$

Assim, para $h=1,2$, temos:

$$\hat{Z}_t(1) = Z_t - \theta a_t$$

$$\hat{Z}_t(2) = \hat{Z}_t(1) + a_{t+1} - \theta a_t$$

De forma geral:

$$\hat{Z}_t(h) = \hat{Z}_t(h-1) + a_{t+h} - \theta a_{t+h-1}, \quad h \geq 1$$

ou

$$\hat{Z}_t(h) = Z_t - \theta a_t + h(a_{t+1} - \theta a_t), \quad h \geq 1$$

Vemos que a função de previsão, para t fixos é uma reta paralela ao eixo das abscissas, isto é, as previsões são constantes qualquer que seja o valor de h .

[GRAFICO 2]

Exemplo 9.6: Seja o modelo ARIMA(0,2,2), sem θ_0

$$(1 - B)^2 Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$$

$$(1 - 2B + B^2) Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

$$Z_t = 2Z_{t-1} - Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Então:

$$Z_{t+h} = 2Z_{t+h-1} - Z_{t+h-2} + a_{t+h} - \theta_1 a_{t+h-1} - \theta_2 a_{t+h-2}$$

e

$$\hat{Z}_t(h) = 2\hat{Z}_t(h-1) - \hat{Z}_t(h-2), \quad h > 2$$

Desta forma, a equação de precisão satisfaz $(1 - B)^2 \hat{Z}_t(h) = 0$

A solução geral é dada por:

$$\hat{Z}_t(h) = c_1^{(t)} + c_2^{(t)} h, h > 0$$

Onde $c_1^{(t)}$ e $c_2^{(t)}$ são coeficientes adaptativos (em relação a origem t),

determinados por $\hat{Z}_t(1)$ e $\hat{Z}_t(2)$. Dessa maneira, a previsão é uma função linear de h , com coeficientes que dependem da origem t .

O modelo ARIMA(0,2,2) sem θ_0 possui função de previsão que pode ser vista como uma generalização da função de previsão do modelo ARIMA(0,1,1) com θ_0 , devido ao fato do coeficiente angular ser adaptativo e não constante.

Exemplo 9.7: Seja o modelo ARIMA(1,1,0)

$$(1 - \phi B)(1 - B)Z_t = a_t$$

$$(1 - B - \phi B + \phi B^2)Z_t = a_t$$

$$Z_t - Z_{t-1} - \phi Z_{t-1} + \phi Z_{t-2} = a_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + \phi Z_{t-1} - \phi Z_{t-2} \neq a_t$$

$$Z_t = (1 + \phi)Z_{t-1} - \phi Z_{t-2} \neq a_t$$

$$\hat{Z}_t(h) = (1 + \phi)\hat{Z}_t(h-1) - \phi\hat{Z}_t(h-2) + [a_{t+h}]$$

Para $h=1,2$, temos:

$$\hat{Z}_t(1) = (1 + \phi)Z_t - \phi Z_{t-1} = c_1^{(t)} + \phi c_2^{(t)}$$

$$\hat{Z}_t(2) = (1 + \phi)\hat{Z}_t(1) - \phi Z_t = c_1^{(t)} + \phi^2 c_2^{(t)}$$

A solução geral é dada por:

$$\hat{Z}_t(h) = c_1^{(t)} + c_2^{(t)}\phi^h$$

ATUALIZAÇÃO DAS PREVISÕES

Dependendo da origem, podemos obter diferentes funções de previsão. Vamos colocar as previsões de Z_{t+h+1} , a partir de duas origens:

$$\text{i. } t+1: \hat{Z}_{t+1}(h) = \psi_h a_{t+1} + \psi_{h+1} a_t + \psi_{h+2} a_{t-1} + \dots$$

$$\text{ii. } t: \hat{Z}_t(h+1) = \psi_{h+1} a_t + \psi_{h+2} a_{t-1} + \dots$$

Subtraindo ii) de i) obtemos:

$$\hat{Z}_{t+1}(h) = \hat{Z}_t(h+1) + \psi_h a_{t+1}$$

Assim, a previsão de Z_{t+h+1} , $\hat{Z}_{t+1}(h)$, feita no instante t , pode ser atualizada quando um novo dado, Z_{t+1} , é observado. Nesse contexto, faremos a previsão de Z_{t+h+1} , na origem $t+1$ adicionando-se à $\hat{Z}_t(h+1)$ um múltiplo do erro de previsão $a_{t+1} = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = e_t(1)$

Exemplo 9.8: Seja Z_t um processo $AR(1)$

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

e,

$$Z_{t+h} = \phi Z_{t+h-1} + a_{t+h}$$

a previsão no instante t é

$$\hat{Z}_t(h) = \phi \hat{Z}_t(h-1), \quad h > 0$$

ou seja,

$$\hat{Z}_t(h) = \phi^h \hat{Z}_t(0) = \phi^h Z_t, h > 0$$

ainda,

$$Z_{t-1}(h+1) = \phi Z_{t-1}(h) = \phi^h Z_{t-1}(1)$$

Subtraindo $\hat{Z}_{t-1}(h+1)$ de $\hat{Z}_t(h)$, temos:

$$\hat{Z}_t(h) - \hat{Z}_{t-1}(h+1) = \phi^h [Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)]$$

Como $a_t = Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)$, então:

$$\hat{Z}_t(h) = \hat{Z}_{t-1}(h+1) + \phi^h a_t$$

Exemplo 9.9: Vamos voltar ao exemplo de ICV, na qual foi ajustado um modelo ARIMA(1,1,0) com θ_0 .

$$(1 - 0,5119B)(1 - B) \ln ICV = 0,01036 + a_t$$

ou

$$1 - 1,5119B + 0,5119B^2 Y_t = 0,01036 + a_t$$

assim

$$Y_{t+h} = 1,5119Y_{t+h-1} - 0,5119Y_{t+h-2} + 0,01036 + a_{t+h}$$

as previsões de origem t são dadas por

$$\hat{Y}_t(h) = 1,5119\hat{Y}_t(h-1) - 0,5119\hat{Y}_t(h-2) + 0,01036, \quad h \geq 1$$

Vamos considerar a origem em $t = 114(jun - 79)$ para $h=1, \dots, 6$. Note que no momento que obtivermos o valor para $t=115$ podemos atualizar as previsões.

INTERVALO DE CONFIANÇA

Para calcularmos o IC de Z_{t+h} devemos supor que $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, para cada t .

Ademais, a variância do erro de previsão é dada por:

$$var(h) = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \sigma_a^2$$

Segue que dados os valores presentes e passados da série $Z_t, Z_{t-1}, \dots$, a distribuição condicional de Z_{t+h} será $N(\hat{Z}_t(h), var(h))$. Logo:

$$U = \frac{Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h)}{[var(h)]^{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$$

O IC será dado por:

$$\hat{Z}_t(h) - z_\gamma [var(h)]^{\frac{1}{2}} \leq Z_{t+h} \leq \hat{Z}_t(h) + z_\gamma [var(h)]^{\frac{1}{2}}$$

No entanto, em $var(h)$, σ_a^2 não é conhecido. Uma probabilidade é substituir $\hat{\sigma}_a^2$ na equação de $var(h)$. Deste modo obtemos:

$$\hat{Z}_t(h) - z_\gamma \hat{\sigma}_a \left[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq Z_{t+h} \leq \hat{Z}_t(h) + z_\gamma \hat{\sigma}_a \left[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo 9.10: Podemos determinar o IC para Y_{t+h} no exemplo 9.9 para cada valor de h, assim, para h=2:

$$\widehat{var}(2) = (1 + \hat{\psi}_1^2)\sigma_a^2, \quad \text{onde } \sigma_a^2 = 0,0000923$$

Logo:

$$\widehat{var}(2) = (1 + 1,5119^2)0,0000923 = 0,000303$$

Para $\gamma = 95\%$, temos $u_\gamma = 1,96$, portanto:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(2) - 1,96(\widehat{var}(2))^{\frac{1}{2}} &\leq Y_{t+2} \leq \hat{Y}_t(2) + 1,96(\widehat{var}(2))^{\frac{1}{2}} \\ 6,7153 - 1,96 \cdot \sqrt{0,000303} &\leq Y_{t+2} \leq 6,7153 + 1,96\sqrt{0,000303} \end{aligned}$$

O IC para Y_{116} é [6,6812; 67494]

O IC para Y_{117} é dado por:

$$\hat{Y}_t(3) - 1,96[\widehat{var}(3)]^{\frac{1}{2}} \leq Y_{117} \leq \hat{Y}_t(3) + 1,96[\widehat{var}(3)]^{\frac{1}{2}}, \text{ sendo } \widehat{var}(3) = 0,000594,$$

temos:

$$6,7393 - 1,96 \cdot \sqrt{0,000594} \leq Y_{117} \leq 6,7393 + 1,96\sqrt{0,000594} [6,6915; 6,7870]$$

Note a variância aumenta com h , logo as amplitudes desses intervalos aumentarão à medida que nos afastarmos da origem t . Esse fato reflete o aumento da incerteza das previsões para h passos à frente.

TRANSFORMAÇÕES E PREVISÕES

Seja Z_t a série original e $Y_t = g(Z_t)$ uma transformação de Z_t . O problema é obter previsões para Z_{t+h} dado que temos um modelo para Y_t esse equivale a dizer que temos previsões para Y_t :

$$Y_{t+h} = g(Z_{t+h})$$

Uma forma “ingênua” de proceder é considerar a equação acima e realizar previsões:

$$\hat{Y}_t(h) = g[\hat{Z}_t(h)]$$

Depois, tentamos obter $\hat{Z}_t(h)$ em função de $\hat{Y}_t(h)$

$$\hat{Z}_t(h) = g^{-1}(\hat{Y}_t(h))$$

Por exemplo, se $Y_t = \ln Z_t$, então $Z_t = e^{Y_t}$, e uma previsão para Z_{t+h} será:

$$\hat{Z}_t(h) = e^{\hat{Y}_t(h)}$$

Pode-se demonstrar que, no caso de Y_t ser Gaussiana, a previsão ótima consiste corrigir a previsão acima, tal que:

$$\hat{Y}_t(h) + \frac{1}{2} \text{var}_Y(h)$$

$$\hat{Z}_t(h) = e^{\hat{Y}_t(h) + \frac{1}{2} \text{var}_Y(h)}$$

Onde $var_Y(h) = var_Y(e_t(h))$, sendo $e_t(h)$ o erro de previsão $Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h)$.

Se $Y_t = \ln Z_t$ seguir um modelo ARIMA, então sabemos que a distribuição condicional de Y_{t+h} , dado o passado, é $N(\hat{Y}_t(h), var_Y(h))$ e um IC para Y_{t+h} com coeficiente de confiança 95% será:

$$\hat{Y}_t(h) \pm 1,96[v\hat{ar}_Y(h)]^{\frac{1}{2}}$$

Um IC para Z_{t+h} com coeficiente de confiança de 95% será:

$$[e^{\hat{Y}_t(h) - 1,96[v\hat{ar}_Y(h)]^{\frac{1}{2}}}, e^{\hat{Y}_t(h) + 1,96[v\hat{ar}_Y(h)]^{\frac{1}{2}}}]$$

Vale lembrar que $v\hat{ar}_Y(h)$ é a estimativa de $var_Y(h)$, com σ_a^2 substituído por $\hat{\sigma}_a^2$.

Exemplos → R