Relatividade e Eletromagnetismo 22/05/2020

Na aula passada, introduzimos os 4-vetores contravariantes a^μ como objetos de 4 componestes (uma temporal e 3 espaciais) com uma lei de transformação entre referenciais inerciais bem definida

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, a^\nu \quad (S \longrightarrow S')$$

Em Relatividade, outros objetos com leis de transformação bem definida são os Tensores de rank n

$$B^{\mu\nu\cdots\theta}$$

contendo n índices $\underbrace{\mu, \nu, \cdots, \theta}_{n}$. Nesta caso particular, todos os n índices são contravariantes, mas no caso geral podem haver m índices contravariantes e n covariantes.

Por exemplo, a lei de transformação para um tensor de rank 2 é

$$B'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \, B^{\alpha\beta} \quad \left(\begin{array}{l}\text{com soma implícita} \\ \text{sobre } \alpha \text{ e } \beta\end{array}\right)$$

Perceba que na lei de transformação, há uma matriz Λ para cada índice e essa regra se estende para cada índice de um tensor de rank n.

Claramente, 4-vetores nada mais são do que tensores de rank 1.

Escalares são tensores de rank 0.

A <u>contração</u> de um índice contravariante com um covariante diminui o rank do tensor em uma unidade:

$B^{\mu\nu\alpha}{}_{\alpha} \leftarrow$ tensor de rank 2 (soma implícita sobre α)

$\underset{\text{rank 2}}{\underset{\uparrow}{A^{\mu\nu}}}\ \underset{\text{rank 1}}{\underset{\uparrow}{B_\nu}} \leftarrow$ 4-vetor (rank 1)

Magnetismo e Relatividade

O Eletromagnetismo, como expresso pelas eqs de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

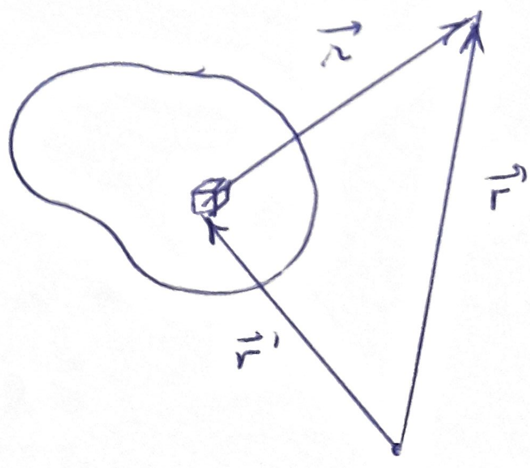
já é uma teoria completamente consistente com a RR.

Ou seja, as eqs acima são consistentes com o princípio da Relatividade e a constância da velocidade da luz.

Tal consistência se manifesta de diversas formas.

Vimos, por exemplo que a velocidade da luz aparece naturalmente nas soluções para os campos a partir das distribuições de carga e corrente, pois tais soluções dependem do tempo retardado

$$t_r = t - \mathscr{r}/c$$

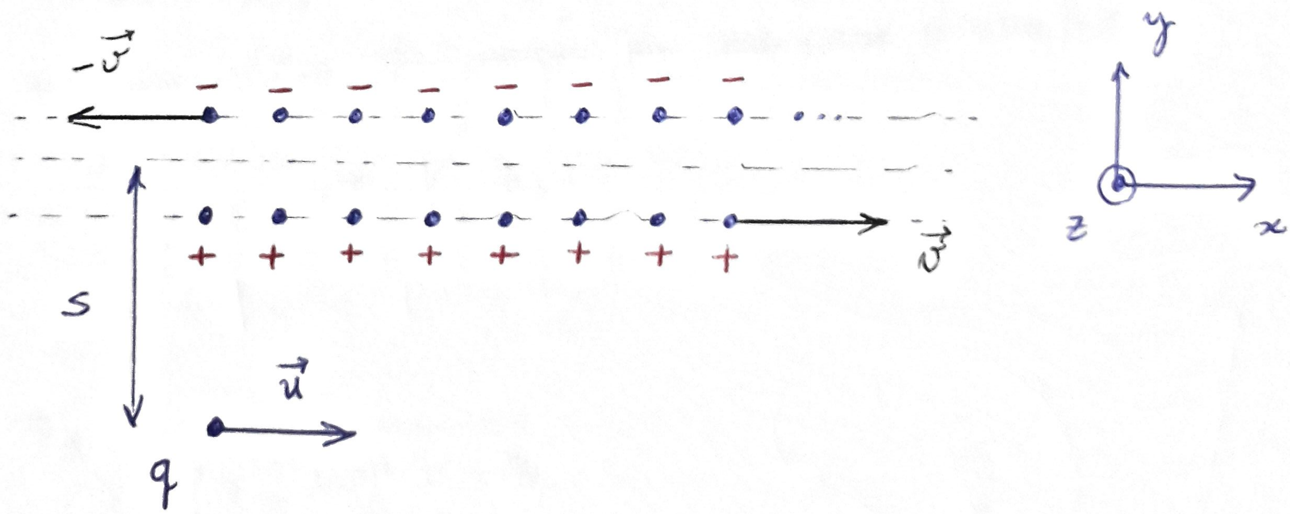


Percebe que $\frac{\mathscr{r}}{c}$ independe da velocidade da distribuição de carga e corrente.

Um teste interessante de consistência e completeza do Eletromagnetismo com a RR é obtido partindo-se de uma teoria que contenha supostamente apenas fenômenos elétricos e usar o Princípio da Relatividade para "prever" a existência de fenômenos magnéticos.

Tome, por exemplo, a situação em que duas linhas de cargas elétricas de sinais opostos se movem em sentidos opostos com velocidade de magnitude v num dado referencial inercial S. As densidades lineares de carga são $\pm\lambda$.

Neste mesmo referencial, uma carga teste q se move com velocidade u ao longo das linhas de cargas

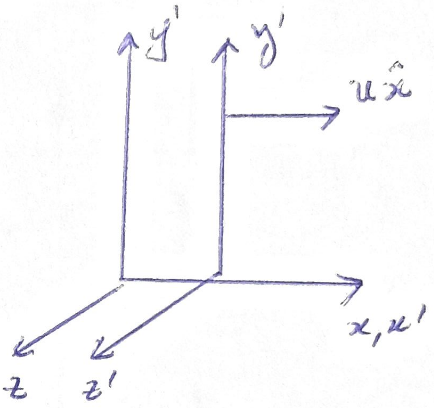


Nessas condições, a corrente elétrica em S é dada por

$$\vec{I} = 2\lambda v\,\hat{x} = I\,\hat{x}$$

Na ausência de fenômenos magnéticos, como em S o "fio" é eletricamente neutro, a força sobre a carga teste q é nula.

Entretanto, num referencial S' em que a carga teste está parada, as linhas de carga positivas e negativas possuem velocidades de magnitudes distintas. Usando a lei de transformação da 3-velocidade, temos



$$v_+ = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}} \qquad v_- = \frac{-v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

Boost de S p/ S' com velocidade $u\hat{x}$

Como $|v_-| > |v_+|$, nesse referencial a contração de Lorentz afetará as densidades de carga de maneiras distantas

$$\lambda_\pm = \pm\, \gamma_\pm \lambda_0$$

onde

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\left(1 - v_\pm^2/c^2\right)^{1/2}}$$

e λ_0 é a densidade linear de carga nos referenciais de repouso das cargas positivas e negativas S_+ e S_-, respectivamente

$S_+ \longrightarrow$ referencial de repouso das cargas positivas

$S_- \longrightarrow$ " " " " " negativas

$S \longrightarrow$ " em que cargas +'s e -'s têm vel. v

$S' \longrightarrow$ " de repouso da carga teste

Perceba que para ir de S para S_+ ou S_-, a magnitude da velocidade de boost é v. Portanto

$$\lambda = \gamma \lambda_0 \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v \mp u}{1 - vc/c^2}\right)^2\right]^{1/2}} = \gamma \frac{\left(1 \mp uv/c^2\right)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Portanto, a densidade linear de carga no referencial S' é

$$\lambda' = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = -\frac{2\gamma\lambda_0 uv}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\lambda' = -\frac{2\lambda uv}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}} \neq 0$$

Portanto, em S' há um campo elétrico

$$\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{s}}{s} = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2 s}\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\hat{s}$$

Como consequência, a carga teste está sujeita a uma força de natureza puramente elétrica (q está em repouso em S')

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2 s}\frac{qu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\hat{s}$$

Pergunta: qual a lei de transformação da força $\vec{F}$?

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{com} \quad \vec{p} = m\vec{\eta} \quad \left(\begin{array}{c}\text{momento}\\ \text{relativístico}\end{array}\right)$$

Então

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} \qquad p^\mu = (p^0, \vec{p}) \Rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

$$= \frac{\gamma\, dp_x - \beta\gamma\, dp^0}{\gamma\, dt - \frac{\beta\gamma}{c} dx} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta\frac{dp^0}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}}$$

Lembre-se que $p^0 = \frac{E}{c}$ onde E é a energia relativística

Então

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

Portanto

$$F_x' = \frac{F_x - \frac{\beta}{c}\frac{dE}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c}u_x}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{m\vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)\cdot\vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u} = \vec{F}\cdot\vec{u}$$

Logo

$$\boxed{F_x' = \frac{F_x - \frac{\beta}{c}\vec{u}\cdot\vec{F}}{1 - \frac{\beta}{c}u_x}}$$

$$F_y' = \frac{dp_y'}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma dt - \frac{\beta\gamma}{c} dx} = \frac{\frac{dp_y}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\boxed{F_y' = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_x\right)}}$$

De maneira análoga

$$\boxed{F_z' = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} u_x\right)}}$$

Perceba que no caso especial em que a partícula está momentaneamente em repouso em S $(\vec{u} = \vec{0})$

$$\vec{F}_\perp' = \frac{1}{\gamma}\vec{F}_\perp \quad e \quad F_{/\!/}' = F_{/\!/}$$

—— // ——

De volta ao problema da linha de cargas

$$\vec{F}' = \frac{-\lambda v}{\pi \epsilon_0 c^2 s} \frac{qu \, \hat{s}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \longrightarrow \vec{F} = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, \vec{F}'$$

$$\vec{F} = \frac{-\lambda v}{\pi \epsilon_0 c^2} \frac{qu}{s} \hat{s}$$

Em termos da corrente $I = 2\lambda v$ $\left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right)$:

$$\vec{F} = -q u \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{s} = q \vec{u} \times \vec{B}$$

Ou seja, a Eletrostática junto com a RR implicam que deve haver em S um campo adicional com as propriedades que já conhecemos do campo magnético

—— // ——

Uma pergunta que certamente precisamos responder nesse momento é: quais as leis de transformação dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$?

Do que acabamos de ver, fenômenos que para um observador se apresentam como puramente magnético, para outro observador inercial pode se apresentar como puramente elétrico.

No caso geral, campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem se transformar juntos, ou seja, devem fazer parte de algum objeto maior (contendo $\vec{E}$ e $\vec{B}$) cujas eqs de transformação vamos determinar agora.

De acordo com a 2ª lei de Newton, para uma carga sujeita à ação de campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ num dado referencial inercial

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

Sabemos que $\vec{p}$, o momento relativístico, é a parte espacial do 4-vetor momento-energia

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = m\eta^\mu = m(\eta^0, \vec{\eta})$$

onde

$$\eta^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad e \quad \vec{\eta} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Vimos que a lei de transformação da força não é simples já que envolve o quociente de duas quantidades ($d\vec{p}$ e dt), cada qual com sua lei de transformação.

Uma quantidade com lei de transformação mais direta é

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{p}}{dt}$$, já que o tempo próprio é um invariante

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt$$

Então

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, q\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right)$$

$$= \frac{q}{c}\left\{\frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\vec{E} + c\,\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\times\vec{B}\right\}$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{q}{c}\left(\eta^0\vec{E} + c\,\vec{\eta}\times\vec{B}\right)$$

Por outro lado, $\frac{d\vec{p}}{d\tau}$ é a parte espacial do 4-vetor $\frac{dp^\mu}{d\tau}$, cuja parte temporal é

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{1}{c}\,\frac{dE}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{1}{c}\,\vec{F}\cdot\vec{u} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{q}{c}\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u} = \frac{q}{c}\,\vec{E}\cdot\vec{\eta}$$

Portanto

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{\eta}\,,\ \eta^0\vec{E} + c\,\vec{\eta}\times\vec{B}\right)$$

O lado esquerdo dessa eq. é um 4-vetor contravariante, de forma que o lado também deve ser.

O lado direito envolve 4 quantidades físicas

* carga elétrica q
* 4-velocidade η^μ
* campo elétrico $\vec{E}$
* " magnético $\vec{B}$

→ a carga elétrica é uma quantidade invariante.

→ as leis de transformação de η^μ e $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ são conhecidas

$$\eta'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\,\eta^\nu \quad e \quad \frac{dp'^\mu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu\,\frac{dp^\nu}{d\tau}$$

→ a partir dessas considerações podemos deduzir as propriedades de tranformação de $\vec{B}$ e $\vec{E}$

O 4-vetor contravariante

$$\frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{\eta}\,,\ \eta^0\vec{E}+c\vec{\eta}\times\vec{B}\right)$$

deve ser construído a partir de um 4-vetor η^μ e de um objeto que dependa de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Esse objeto deve ser então um tensor de rank 2, que chamaremos de $F^{\mu\nu}$, tal que

$$F^{\mu\nu}\eta_\nu = \frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{\eta}\,,\ \eta^0\vec{E}+c\vec{\eta}\times\vec{B}\right)$$

ou seja

$$\begin{cases} F^{0\nu}\eta_\nu = \dfrac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{\eta} & \text{(parte temporal)} \\ F^{i\nu}\eta_\nu = \dfrac{1}{c}\left(\eta^0\vec{E}+c\vec{\eta}\times\vec{B}\right)_i & \text{(parte espacial)} \end{cases}$$

Parte temporal

$$F^{0\nu}\eta_\nu = -F^{00}\eta^0 + F^{0i}\eta^i = \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{\eta}$$

$$\Downarrow$$

$$F^{00}=0 \quad e \quad F^{0i}=\frac{E_i}{c}$$

Parte espacial

$$F^{i\nu}\eta_\nu = -F^{i0}\eta^0 + F^{ij}\eta_j$$

$$= -F^{i0}\eta^0 + \sum_j F^{ij}\eta_j$$

$$= \eta^0 \frac{E_i}{c} + \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\eta_j B_k$$

onde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{p/ } i=1, j=2, k=3 \text{ e qquer permutação par} \\ -1 & \text{p/ qquer permutação ímpar} \\ 0 & \text{se quaisquer 2 índices são iguais} \end{cases}$$

Então

$$F^{i0} = -\frac{E_i}{c} = -F^{0i}$$

$$\sum_j F^{ij}\eta_j = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\eta_j B_k \Rightarrow F^{ii} = 0$$

$$F^{12}\eta_2 = \epsilon_{123}\eta_2 B_3 \Rightarrow F^{12} = B_z = -F^{21}$$

$$F^{13}\eta_3 = \epsilon_{132}\eta_3 B_2 \Rightarrow F^{13} = -B_y = -F^{31}$$

$$F^{23}\eta_3 = \epsilon_{231}\eta_3 B_1 \Rightarrow F^{23} = B_x = -F^{32}$$

Portanto

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

tensor de campo eletromagnético

$\Uparrow$

tensor de traço nulo

antissimétrico

a 2ª lei de Newton em formato covariante para o caso de uma carga q num campo eletromagnético fica

$$K^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} = q\, F^{\mu\nu} \eta_\nu$$

Essa equação é válida em qualquer referencial inercial e os objetos que nela aparecem se transformam de acordo com

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu \qquad \eta'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, \eta^\nu \qquad q' = q$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha\, \Lambda^\nu{}_\beta\, F^{\alpha\beta}$$

Lei de transformação dos campos

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta}\,F^{\alpha\beta}$$

$$\frac{E_x'}{c} = F'^{01} = \Lambda^{0}_{\ \alpha}\,\Lambda^{1}_{\ \beta}\,F^{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^{0}_{\ 0}\,\Lambda^{1}_{\ 1}\,F^{01} + \Lambda^{0}_{\ 1}\,\Lambda^{1}_{\ 0}\,F^{10}$$

$$= \gamma^2 F^{01} + \beta^2\gamma^2 F^{10}$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)\,F^{01} = \frac{E_x}{c} \Rightarrow \boxed{E_x' = E_x}$$

$$\frac{E_y'}{c} = F'^{02} = \Lambda^{0}_{\ \alpha}\,\Lambda^{2}_{\ \beta}\,F^{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^{0}_{\ 0}\,\Lambda^{2}_{\ 2}\,F^{02} + \Lambda^{0}_{\ 1}\,\Lambda^{2}_{\ 2}\,F^{12}$$

$$= \gamma F^{02} - \beta\gamma F^{12}$$

$$= \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z\right) \Rightarrow \boxed{E_y' = \gamma\,(E_y - v B_z)}$$

De maneira análoga (verifique!)

$$\boxed{E_z' = \gamma\,(E_z + v B_y)}$$

$$\boxed{B_x' = B_x} \qquad \boxed{B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)} \qquad \boxed{B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)}$$

Caso especial $\vec{B} = \vec{0}$ em S:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad e \quad |\vec{E}'_{\perp}| = \gamma\, |\vec{E}_{\perp}|$$

$$\vec{B}' = B'_y\,\hat{y} + B'_z\,\hat{z} = \gamma \frac{v}{c^2}\left(E_z\,\hat{y} - E_y\,\hat{z}\right)$$

$$= \frac{v}{c^2}\left(\gamma E_z\,\hat{y} - \gamma E_y\,\hat{z}\right) = \frac{v}{c^2}\left(E'_z\,\hat{y} - E'_y\,\hat{z}\right)$$

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}\,\vec{v} \times \vec{E}'$$

Caso especial $\vec{E} = \vec{0}$ em S:

$$\vec{E}' = -\gamma v\left(B_z\,\hat{y} - B_y\,\hat{z}\right) = -v\left(B'_z\,\hat{y} - B'_y\,\hat{z}\right)$$

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$$

com

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} \quad e \quad B'_y = \gamma B_y \quad B'_z = \gamma B_z$$

Campo elétrico de uma carga pontual em movimento uniforme

No referencial de repouso S_0 (carga na origem)

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0^2} \hat{r}_0$$

Em termos das componentes cartesianas

$$E_{x_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$E_{y_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

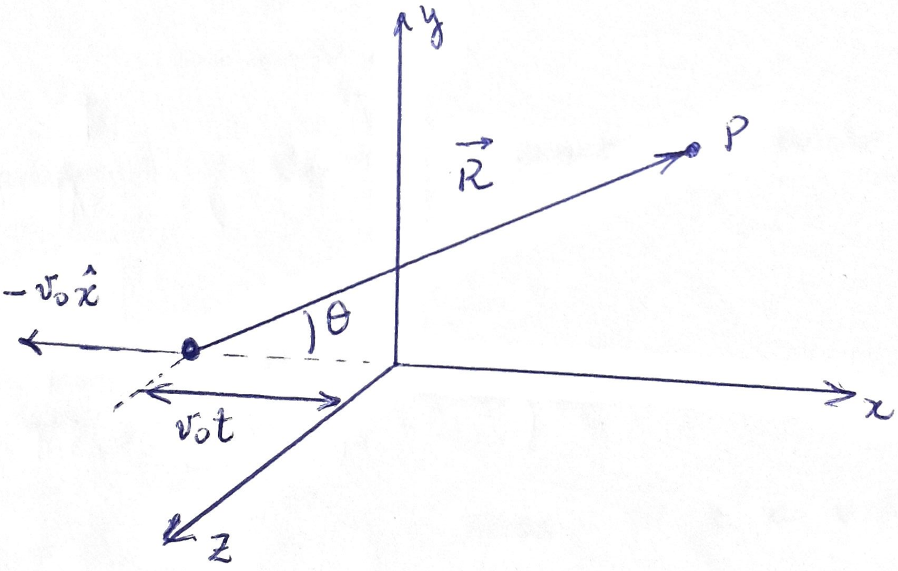
$$E_{z_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

De acordo com as leis de transformação p/ $\vec{E}$, em S onde a carga se move com velocidade $-v_0 \hat{x}$

$$E_x = E_{x_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \gamma_0 E_{y_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$E_z = \gamma_0 E_{z_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$



Das transformações de Lorentz

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_0 (x + v_0 t) = \gamma_0 R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

Ou seja, em S

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 \vec{R}}{\left(\gamma_0^2 R^2 \cos^2\theta + R^2 \sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2}$$

Esse foi o campo que obtivemos antes via potenciais retardados de Liénard-Wiechert

—— // ——

Campo magnético de uma carga pontual em movimento uniforme

Nesse caso, sabemos que em S:

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$ onde $\vec{v}$ é a velocidade de S c/ respeito a S_0

$$\vec{v} = v_0 \hat{x}$$

logo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left[1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{3/2}} \frac{\hat{\phi}}{R^2}$$

$\hat{\phi} \rightarrow$ horário p/ um observador vendo a carga se afastar