

Integração Numérica

Parte II

Elias S. Helou Neto

Integração Numérica

Regras de Quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Integração Numérica

Regras de Quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx.$$

Integração Numérica

Regras de Quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) dx.$$

Integração Numérica

Regras de Quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \int_a^b f(x_i) \ell_i(x) dx.$$

Integração Numérica

Regras de Quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \ell_i(x) dx.$$

Integração Numérica

Regras de Quadratura

- ▶ Obtidas por integração do polinômio interpolador

Integração Numérica

Regras de Quadratura

- ▶ Obtidas por integração do polinômio interpolador
- ▶ Determinadas pelo número e posições dos nós de interpolação

Integração Numérica

Regra do Trapézio

► $n = 1$

Integração Numérica

Regra do Trapézio

▶ $n = 1$

▶ $x_0 = a$

Integração Numérica

Regra do Trapézio

▶ $n = 1$

▶ $x_0 = a$

▶ $x_1 = b$

Integração Numérica

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

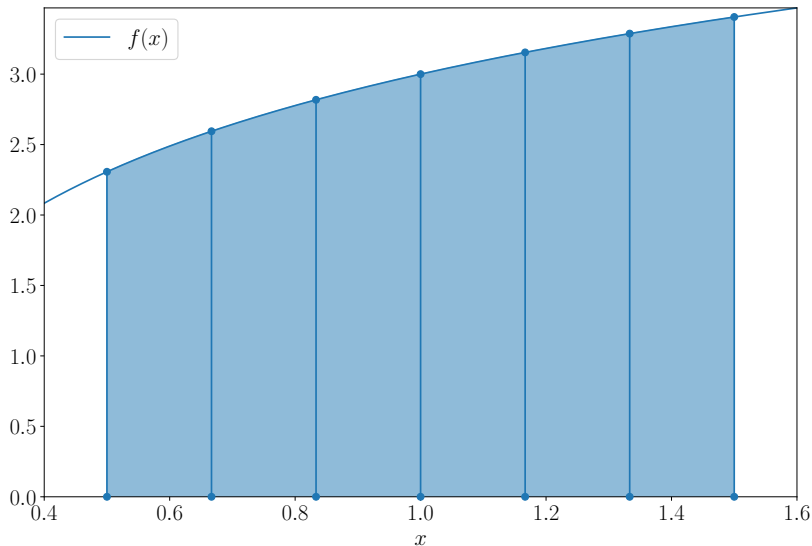
Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\ = -f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12}\end{aligned}$$

Integração Numérica

Regra do Trapézio Repetida



Integração Numérica

Regra do Trapézio Repetida

$$x_i = a + i \frac{b - a}{N}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

Integração Numérica

Regra do Trapézio Repetida

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2N} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Integração Numérica

Regra do Trapézio Repetida

$$T_{N,a,b}^f := \frac{b-a}{2N} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\int_a^b f(x)dx - T_{N,a,b}^f$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - T_{N,a,b}^f$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - T_{1,x_i,x_{i+1}}^f \right]$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\ = -f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12}\end{aligned}$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ = -f''(\xi_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12}\end{aligned}$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ = -f''(\xi_i) \frac{(b-a)^3}{N^3 12} \end{aligned}$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - T_{1,x_i,x_{i+1}}^f \right]$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$- \sum_{i=0}^{N-1} f''(\xi_i) \frac{(b-a)^3}{N^3 12}$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$-\frac{(b-a)^3}{N^2 12} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f''(\xi_i)}{N}$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$-\frac{(b-a)^3}{N^2 12} f''(\eta)$$

Integração Numérica

Erro na Regra do Trapézio Repetida

$$\int_a^b f(x) dx - T_{N,a,b}^f = - \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta)$$

Integração Numérica

Regras de Newton-Cotes Fechadas

► $n \geq 0$

Integração Numérica

Regras de Newton-Cotes Fechadas

► $n \geq 0$

► $x_i = a + \frac{b - a}{n} i$

Integração Numérica

Regras de Newton-Cotes Fechadas

- ▶ Incluem os extremos do intervalo

Integração Numérica

Regras de Newton-Cotes Fechadas

- ▶ Incluem os extremos do intervalo
- ▶ Interpolam em pontos regularmente espaçados

Integração Numérica

Regra de Simpson

► $n = 2$

Integração Numérica

Regra de Simpson

▶ $n = 2$

▶ $x_0 = a$

Integração Numérica

Regra de Simpson

► $n = 2$

► $x_0 = a$

► $x_1 = \frac{a + b}{2}$

Integração Numérica

Regra de Simpson

▶ $n = 2$

▶ $x_0 = a$

▶ $x_1 = \frac{a + b}{2}$

▶ $x_2 = b$

Integração Numérica

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

Integração Numérica

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)\ell_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ell_1(x) + f(b)\ell_2(x)dx$$

Integração Numérica

Regra de Simpson

$$f(a) \int_a^b \ell_0(x) dx +$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \ell_1(x) dx +$$
$$f(b) \int_a^b \ell_2(x) dx$$

Integração Numérica

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_2(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) - p_2(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$p_3(x) = p_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$p_2(x) = p_3(x) - (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) - p_3(x) + \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b (x - a) \left(x - \frac{a + b}{2} \right) (x - b) dx = 0$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) - p_3(x) + \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) - p_3(x) dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$- \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b)(x-\bar{x}) \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24} dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$- \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24} dx$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$-\frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx$$

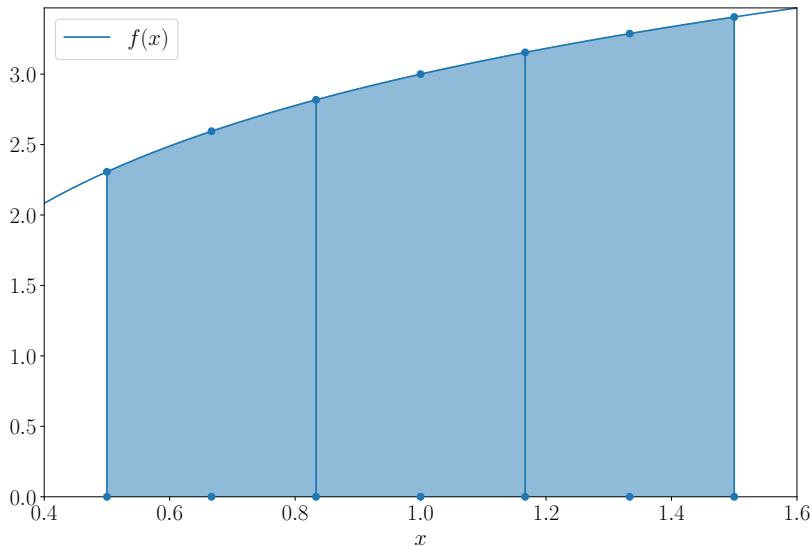
Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson

$$\frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \frac{(b-a)^5}{120} = \frac{f^{(4)}(\eta)}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida



Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x)dx$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x) dx \approx \frac{x_{2(i+1)} - x_{2i}}{6} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)})]$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{3N} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)})]$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)})]$$

Integração Numérica

Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$S_{N,a,b}^f := \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x)dx - S_{N,a,b}^f = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x)dx - S_{2,x_{2i},x_{2(i+1)}}^f \right]$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x) dx - S_{N,a,b}^f = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{90} \left(\frac{x_{2(i+1)} - x_{2i}}{2} \right)^5$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x) dx - S_{N,a,b}^f = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{90} \left(\frac{b-a}{N} \right)^5$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x) dx - S_{N,a,b}^f =$$

$$\frac{(b-a)^5}{180N^4} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{N/2}$$

Integração Numérica

Erro na Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x)dx - S_{N,a,b}^f = \frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\eta)$$