

MAE312 - Introdução aos Processos Estocásticos
Provinha-L2 - Prof. Fábio Machado
entregar 5/abril

1. Considere uma farmácia com dois caixas. Suponha que quando o Sr. Hermi chega para ser atendido ele percebe que o Sr. Sergio está sendo atendido pelo caixa 1 e o Sr. Marcos está sendo atendido pelo caixa 2. O Sr. Hermi é cliente da farmácia e sabe que será atendido assim que terminar o atendimento de um dos outros dois clientes à sua frente.
 - a. Suponha que os tempos de atendimento sejam independentes, com distribuição exponencial de taxa λ . Qual a probabilidade de que o Sr. Hermi seja o último dos três a ser atendido?
 - b. Suponha que os tempos de atendimento sejam independentes mas que, enquanto o tempo de atendimento do caixa que o Sr. Sérgio está sendo atendido segue uma exponencial de taxa λ_1 , o tempo de atendimento do caixa que está atendendo o Sr. Marcos segue uma exponencial de taxa λ_2 . Qual a probabilidade de que o Sr. Hermi seja o último dos três a ser atendido?
 - c. Suponha agora que os tempos de atendimento continuem independentes mas que suas taxas estejam relacionadas com os clientes e não com os caixas. Assim, o tempo de atendimento do Sr. Marcos é exponencial de taxa λ_m , o tempo de atendimento do Sr. Sergio é exponencial de taxa λ_s e o tempo de atendimento do Sr. Hermi é exponencial de taxa λ_h . Qual a probabilidade de que o Sr. Hermi seja o último dos três a ser atendido?
2. Veículos passam em um ponto de uma estrada segundo um Processo de Poisson com taxa de um veículo por minuto. Se 10 % destes veículos são vans, responda:
 - a. Qual é a probabilidade de que pelo menos duas vans passem pelo ponto da estrada durante os próximos 30 minutos?
 - b. Sabendo que 10 vans passaram pelo ponto da estrada durante uma hora, qual é o número esperado de veículos que passaram pela estrada nesse período?
 - c. Sabendo que 10 vans passaram pelo ponto da estrada durante uma hora, qual é a probabilidade que não mais do que 8 tenham passado nos primeiros 30 minutos desta hora?
 - d. Se 3 veículos passaram pela estrada durante dez minutos, qual é a probabilidade que apenas vans ou nenhuma van tenha passado?
3. Seja X_n um processo de ramificação com distribuição de número de descendentes por indivíduo dada por
$$p_k = (1 - p)p^k, k \geq 0 \text{ e } p \in (0, 1).$$
 - a. Calcule a probabilidade de extinção
 - b. Calcule o número esperado de indivíduos que existirão nessa população se $X_0 = 4$.
 - c. Suponha que $X_0 = 1$ e $p = 1/2$. Para $T = \min\{n : X_n = 0\}$ encontre $P[T = n]$.
4. Suponha uma moeda sendo lançada constantemente com probabilidade p de resultado *cara*. O jogador **A** vence o jogo caso m caras apareçam antes de n coroas, caso contrário o jogador **B** vence o jogo.
 - a. Calcule a probabilidade do jogador **A** vencer o jogo.
 - b. Qual a relação deste problema com o problema do passeio aleatório com barreiras?
 - c. Para $m = n$, apresente o esboço do gráfico para a probabilidade do jogador **A** vencer em função de p
 - d. Para $p = 1/2$ apresente o esboço do gráfico para a probabilidade do jogador **A** vencer em função de m fixando $m + n = 100$.