MAE221 - Probabilidade I
Lista 6 - Prof. Fábio Machado
fazer até 16/maio

1. O vetor aleatório (X,Y) tem distribuição de probabilidade conjunta

$$P(X=x,Y=y)=k(x+1)(y+1), \;\; x,y=0,1,2,3.$$

   a) Obter o valor de k.

   b) Obter as distribuições marginais de X e de Y.

   c) Obter a distribuição de $X|Y$.

   d) X e Y são independentes?

   e) Obter $P(X+Y>2)$ e $P(X^2+Y^2\leq 1)$.

2. Uma urna contém uma bola branca e uma bola verde. Uma bola é retirada da urna, ao acaso. Essa bola é devolvida à urna juntamente com n bolas da mesma cor. Em seguida, retira-se uma nova bola da urna. Seja $X_i=1$, se a $i-$ésima bola retirada da urna é branca e $X_i=0$, caso contrario, para $i=1,2$.

   a) Obter $P(X_1\neq X_2)$.

   b) Obtenha o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2. Qual é o valor desse coeficiente quando $n=0$? Qual é o valor do coeficiente quanto $n\to\infty$?

3. Seja (X,Y) um vetor aletório contínuo distribuido uniformemente sobre o quadro de vértices $A=(0,0), B=(0,2), C=(2,2)$ e $D=(2,0)$. Sejam $D1, D_2, D_3$ e D_4 as distâncias do ponto (X,Y) aos lados AB, BC, CD e DA do quadrado, respectivamente. Seja $D=\text{mín}\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$.

   a) Calcule $P(D>2/3)$.

   b) Obtenha a função de densidade de probabilidade da v.a D.

   c) Qual é o valor esperado de D?

4. Escolhemos três números ao acaso a,b e c do intervalo $[0,1]$ e resolvemos a equação a equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0$. Qual é a probabilidade de que a equação tenha soluções reais?

5. Se X_1,X_2,X_3, são variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas em $[0,1]$, calcule a probabilidade de que a maior das três seja a soma das outras duas.

6. Considere o conjunto

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : |x|+|y|\leq 3\},$$

   assumindo que um ponto (X,Y) é escolhido aleatoriamente e uniformemente em H.

   a) Obtenha a função de distribuição conjunta de (X,Y).

   b) Obtenha a função densidade de probabilidade de $X|Y=1$.

   c) Calcule $E[X|Y=1]$.

   d) X e Y são independentes?