

# **Geometria Vetorial: Retas em $\mathbb{R}^n$ ( $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ )**

**ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”**

**Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle**

**Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP**

**19 de maio de 2020**

# Axioma de Hilbert

---

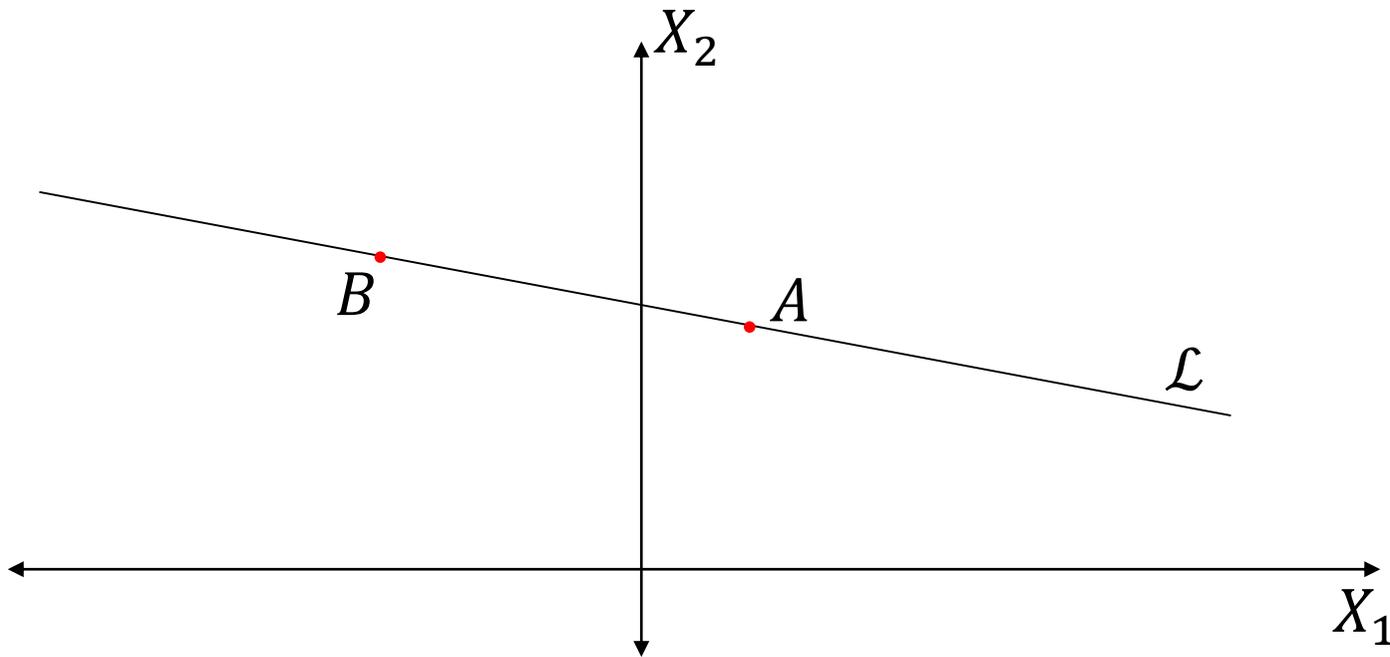
Uma das premissas propostas por David Hilbert (1899) no livro “Grundlagem der Geometrie” (“Fundamentos da Geometria”) para fundamentar um tratamento moderno da geometria euclidiana foi

**Dois pontos distintos A e B sempre determinam completamente uma linha reta.**

# Axioma de Hilbert

---

**Dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sempre determinam completamente uma linha reta.**

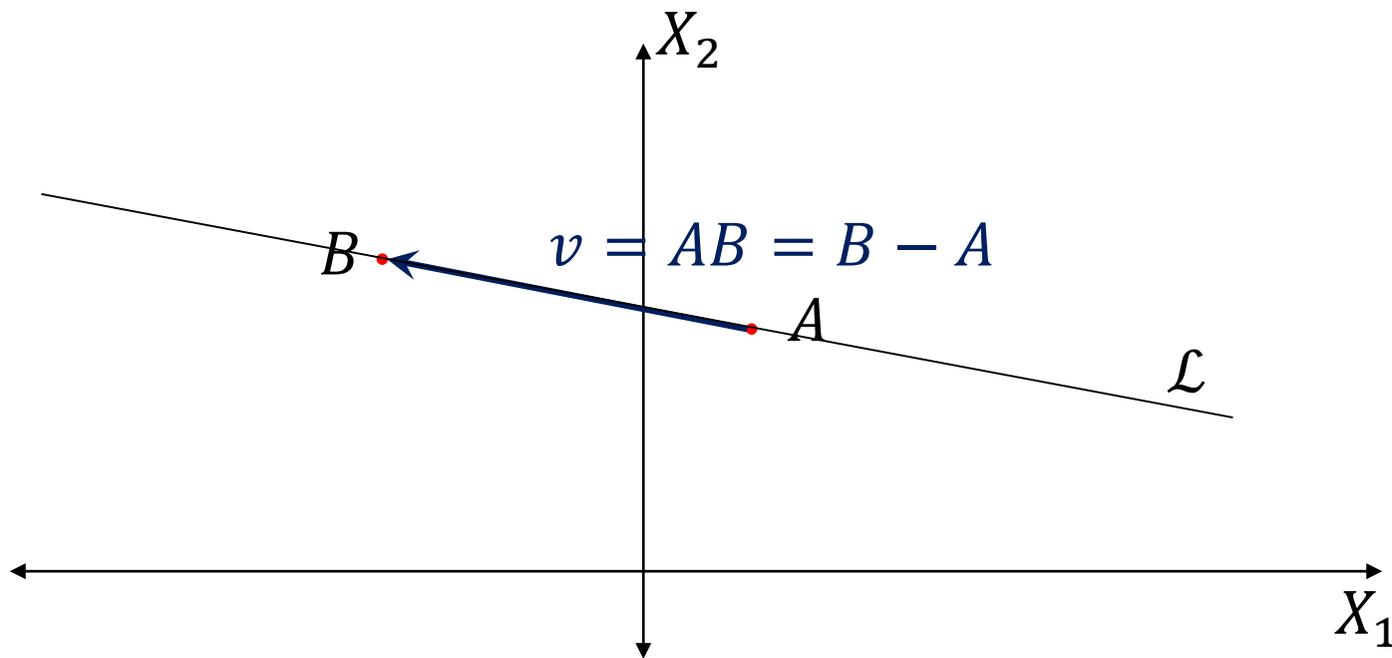


# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Sejam dois pontos diferentes no plano cartesiano,  $A$  e  $B$ . Construímos o vetor que une os pontos

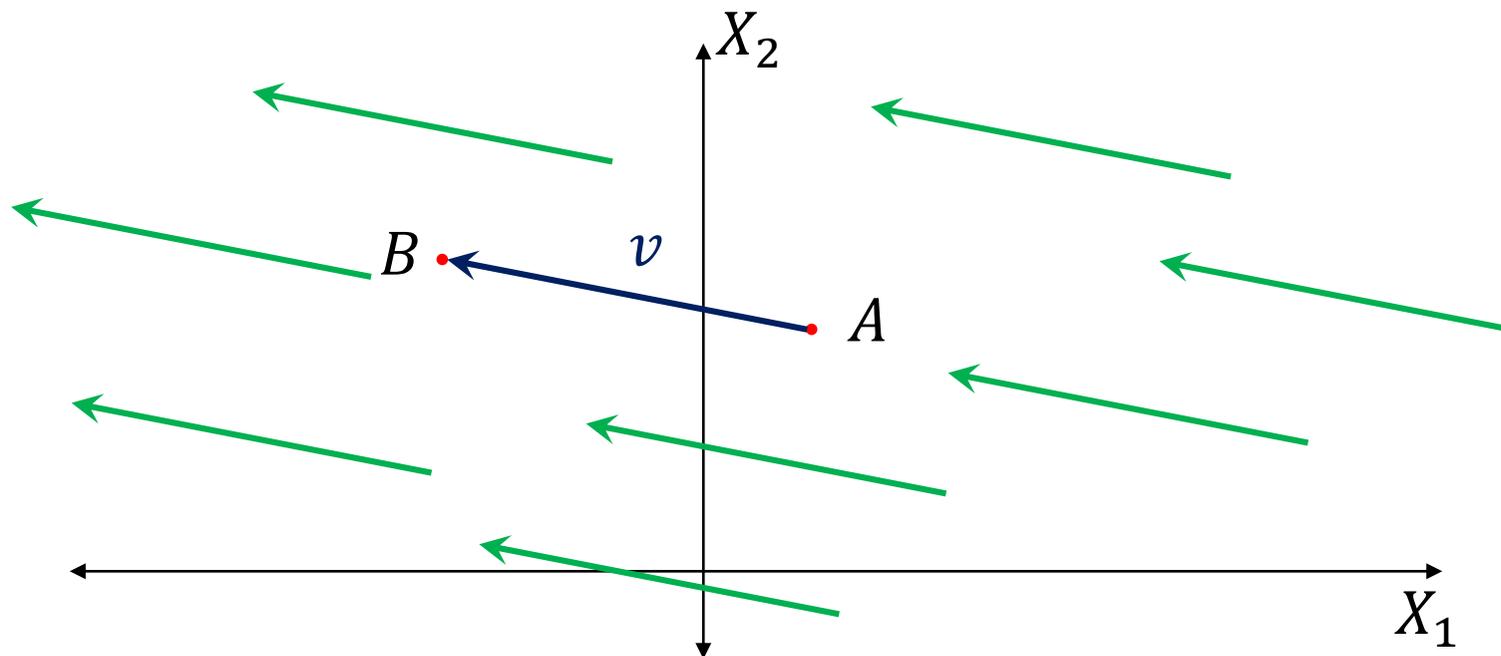
$$v = AB = B - A$$



# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

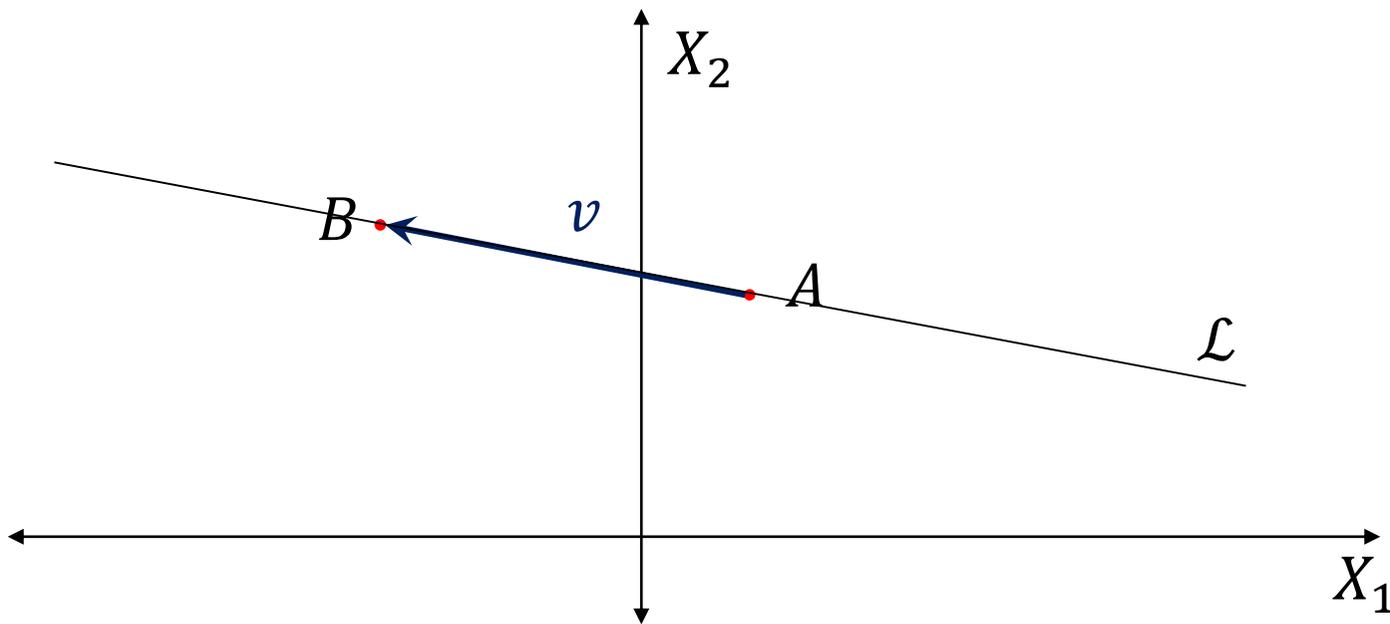
O vetor  $v$ ,  $v \neq 0$ , pode ser representado em qualquer posição no plano, mas apenas uma representação parte do ponto  $A$ . A representação do vetor  $v$  partindo de  $A$  é única.



# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Observar: Se considerarmos o vetor,  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ , e o ponto  $A$ , o ponto final é  $B$ , e não existe outra possibilidade. Assim, vamos considerar o ponto  $A$  e o vetor  $v$  para construir a única reta determinada.

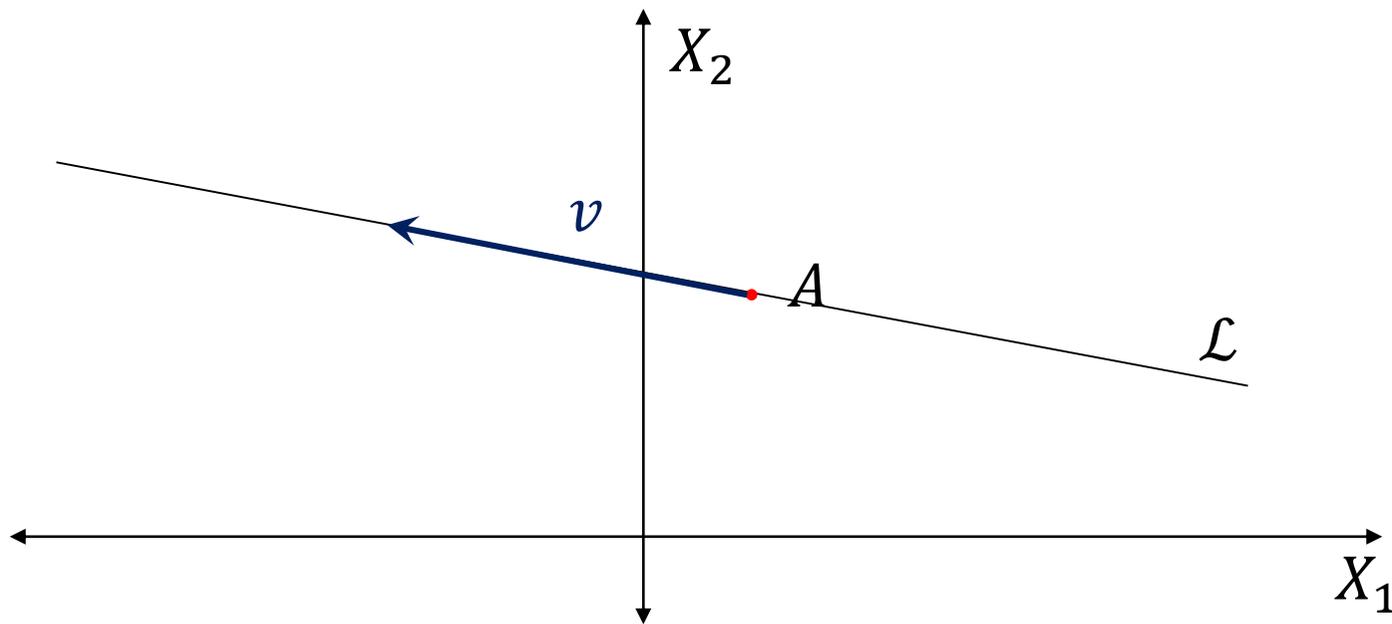


# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Se considerarmos o vetor,  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ , e o ponto  $A$ , desconsideramos o ponto  $B$ .

Continua-se com dois elementos fixos: o ponto  $A$  e o vetor  $v$ , para construir a reta determinada.



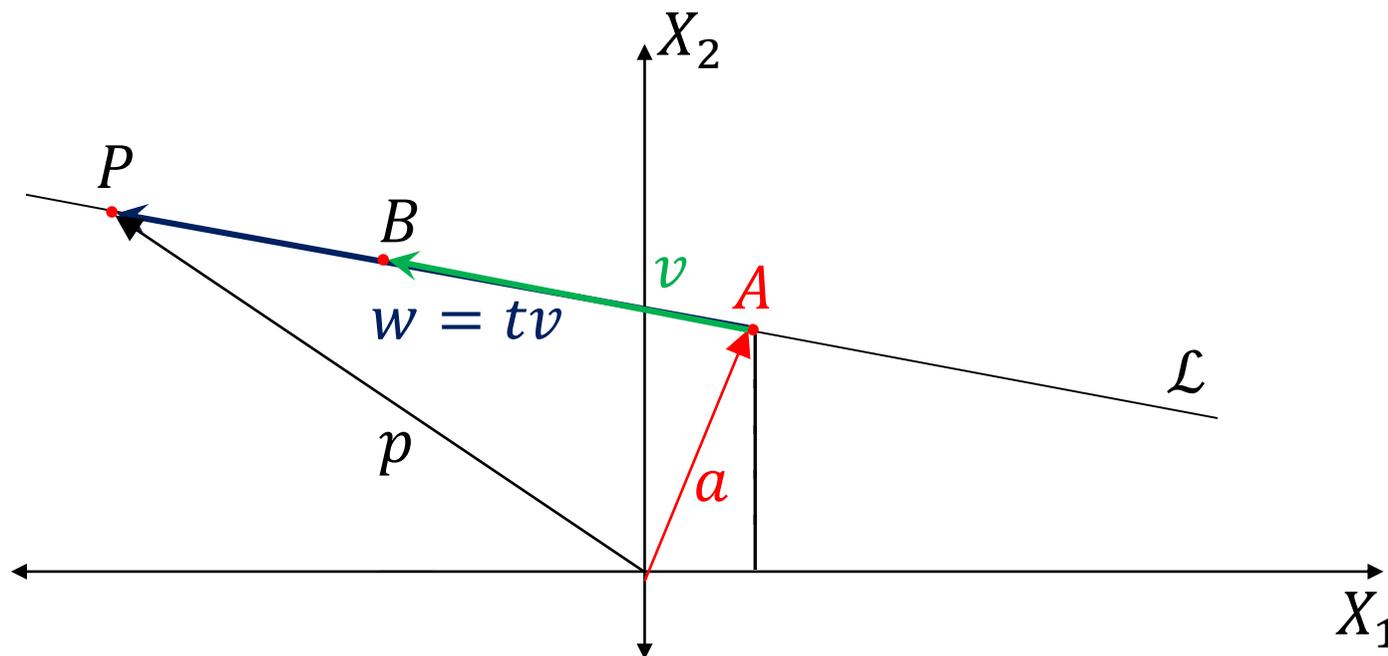
# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Observar: Se construímos um vetor  $w$  paralelo a  $v$ ,  
existe um escalar  $t \in \mathbb{R}$ , que satisfaz  $w = tv$ .

Somando, atingimos o ponto:

$$P = A + w = A + tv.$$



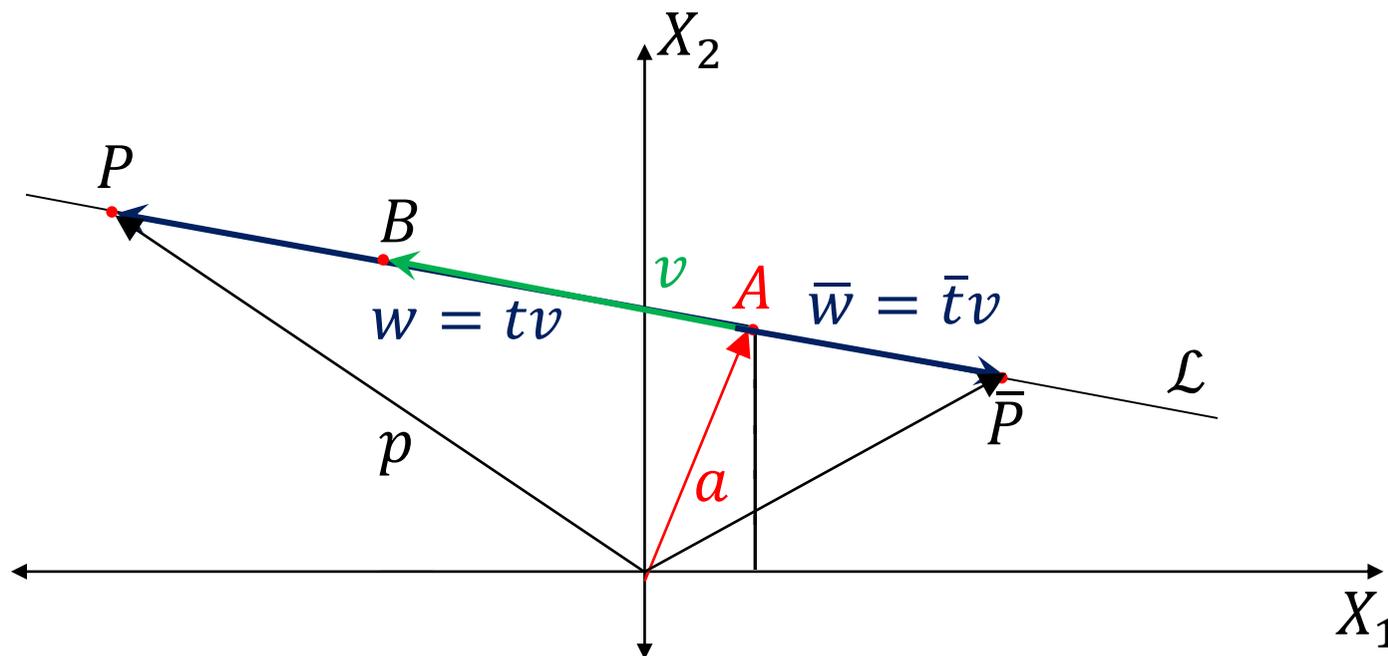
# Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Observar: Se construímos um vetor  $w$  paralelo a  $v$ ,  
existe um escalar  $t \in \mathbb{R}$ , que satisfaz  $w = tv$ .

Somando, atingimos o ponto:  $P = A + w = A + tv$ .

Variando valores de  $t$ , atingimos pontos diferentes.



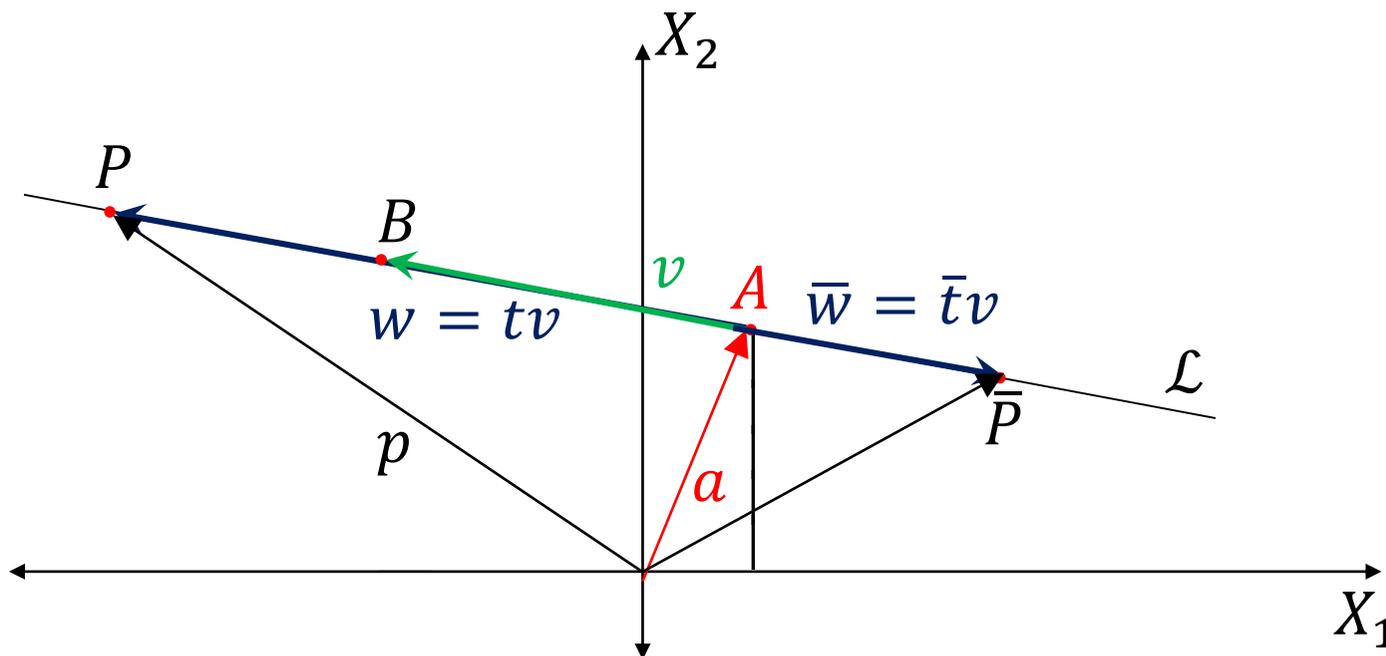
# Reta em $\mathbb{R}^2$

Variando valores de  $t$ , obtemos pontos que

$$P = A + w = A + tv$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ .

Formamos o conjunto de todos os pontos possíveis.



# Equação vetorial de uma Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Dado um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^2$ , e dado um ponto fixo  $A$ , então define-se uma reta  $\mathcal{L}$  como o conjunto de pontos que satisfaçam

$$\mathcal{L} = \{P / P = A + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}: P = A + tv, t \in \mathbb{R}$$

A equação dada é chamada de **equação vetorial** da reta  $\mathcal{L}$ . O vetor  $v$ , não nulo, é chamado de **vetor de direção** da reta  $\mathcal{L}$ . O ponto fixo  $A$  é chamado de **ponto de passagem** da reta  $\mathcal{L}$ .

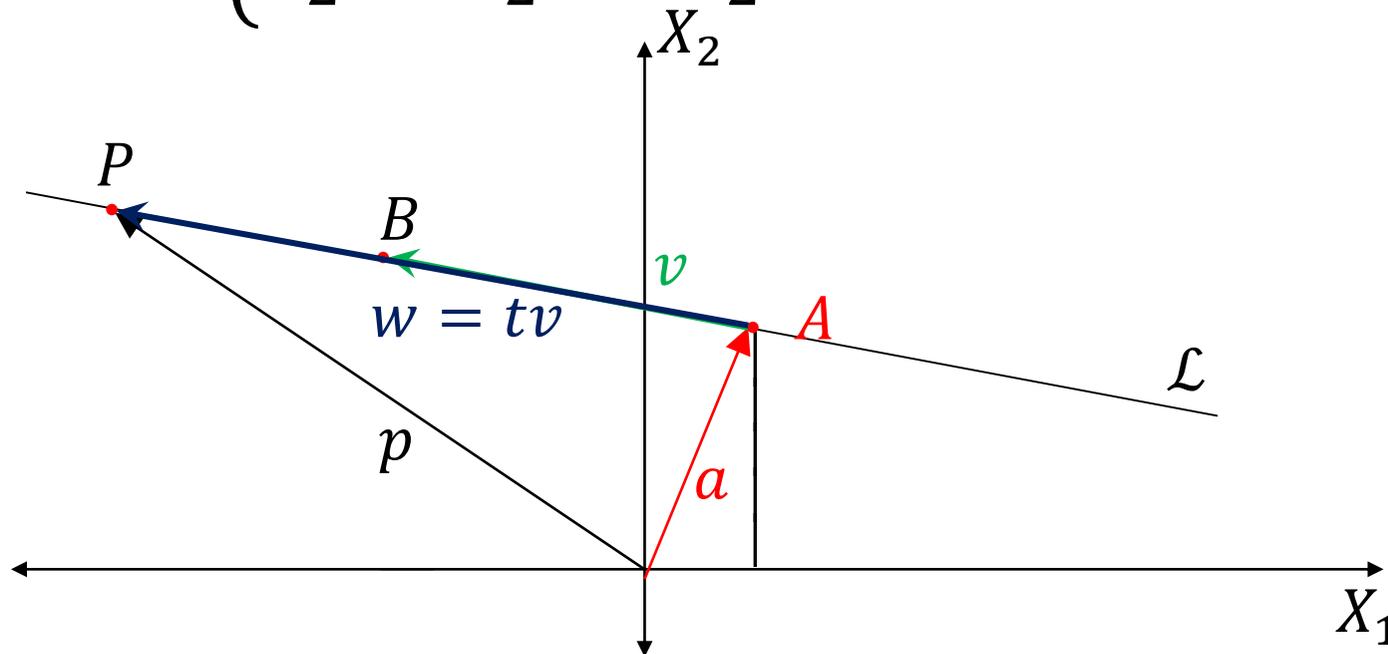
# Equações paramétricas da Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Se  $P = (x_1, x_2) \in \mathcal{L}$ , então  $\mathcal{L}: P = A + tv$

$$\mathcal{L}: (x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}$$



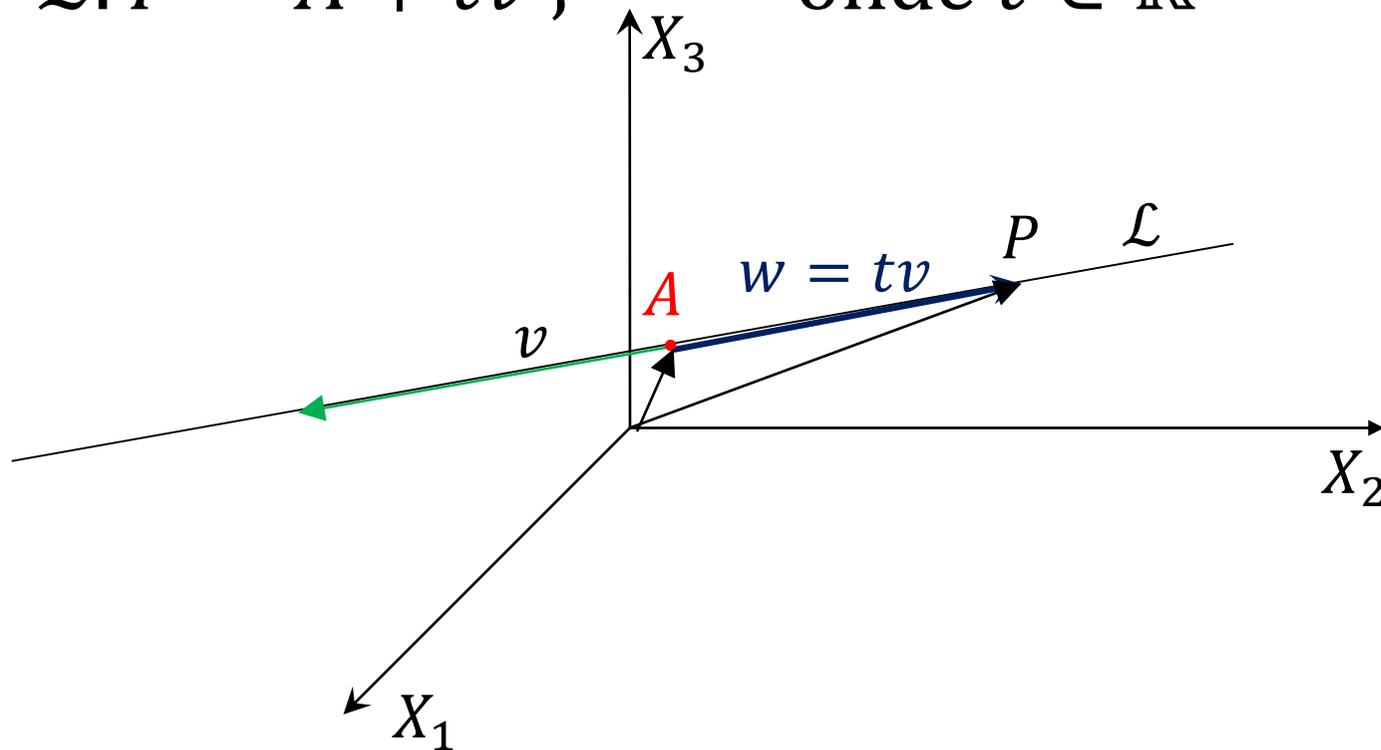
Dá um sistema de equações paramétricas da reta  $\mathcal{L}$ .

# Reta em $\mathbb{R}^3$

---

Em  $\mathbb{R}^3$ , similarmente. Se usarmos um vetor  $v$ , não nulo, (**vetor de direção**) e o ponto fixo  $A$  (**ponto de passagem**), construímos o conjunto de pontos

$$\mathcal{L}: P = A + tv, \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}$$



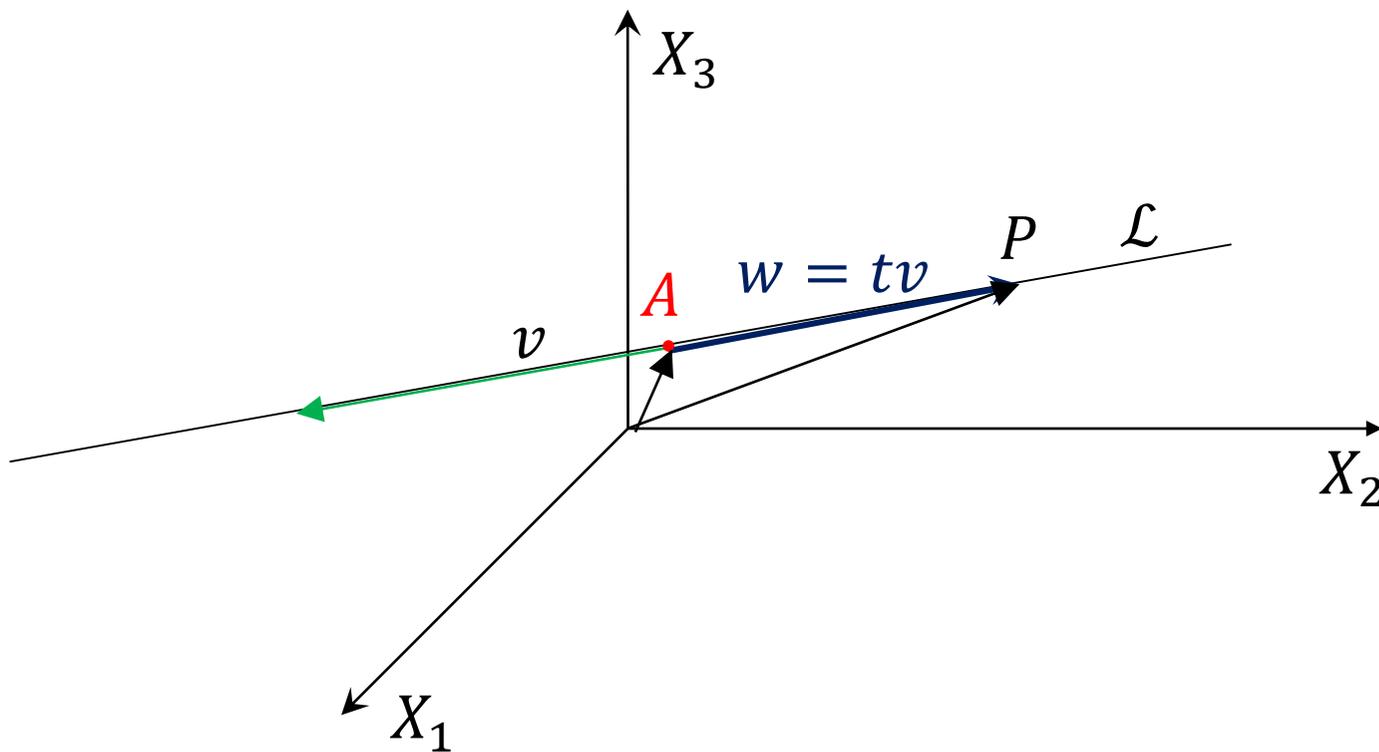
# Reta em $\mathbb{R}^3$

---

Portanto, podemos construir o conjunto dos pontos  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}: P = A + tv, \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}: (x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$



# Equação vetorial da Reta em $\mathbb{R}^n$

---

Estendemos a definição para  $\mathbb{R}^n$

Dado um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$ , vetor de direção, e dado um ponto de passagem fixo  $A$ , então define-se a reta  $\mathcal{L}$  como o conjunto de pontos que satisfazem

$$\mathcal{L} = \{P / P = A + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}: P = A + tv \quad t \in \mathbb{R}$$

A equação, válida para todos os pontos da reta, é chamada de **equação vetorial** da reta  $\mathcal{L}$ .

# Reta em $\mathbb{R}^n$

---

Observar que a equação vetorial é um conjunto de várias equações.

Dado um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , e um ponto de passagem  $A = (a_1, \dots, a_n)$ , então a reta  $\mathcal{L}$  é o conjunto de pontos  $P = (x_1, \dots, x_n)$  que satisfaçam:

$$\mathcal{L}: (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + t(v_1, \dots, v_n)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ .

# Reta em $\mathbb{R}^n$

---

Então a equação vetorial da reta  $\mathcal{L}$ , pode ser expressada pelas equações de cada componente:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases}$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ .

Chamamos de **equações paramétricas** da reta  $\mathcal{L}$ .

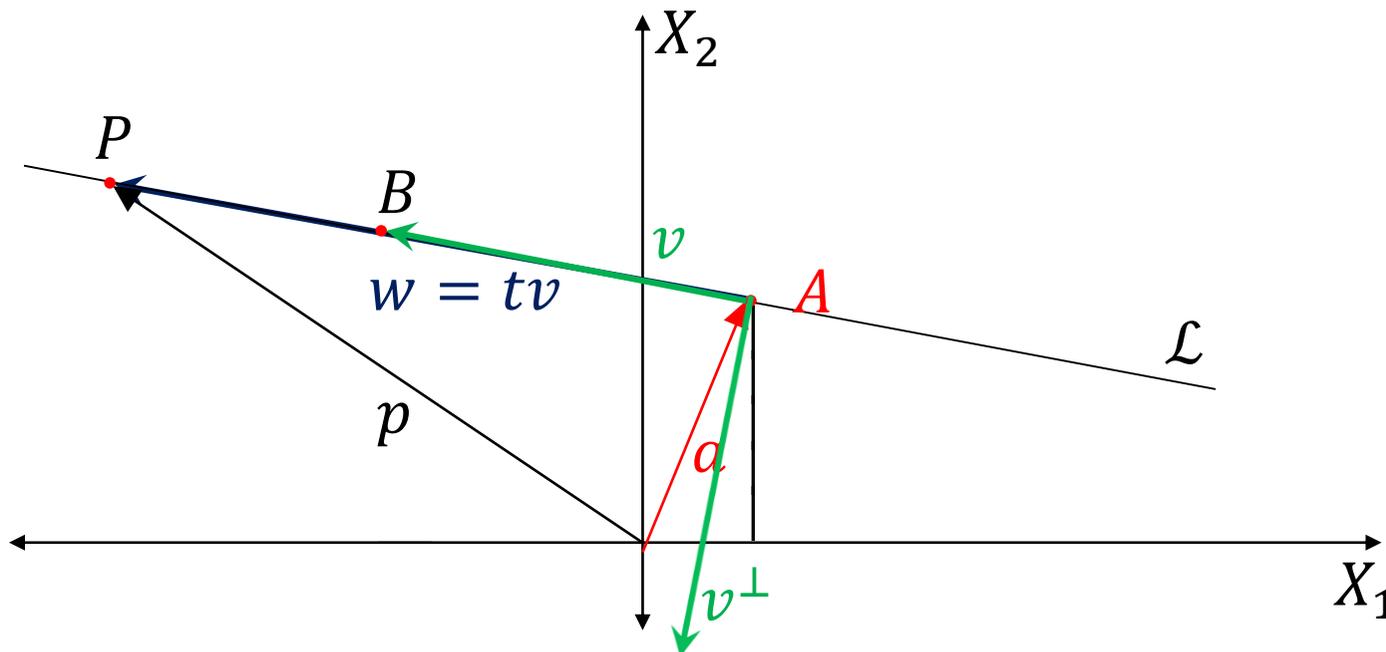
# Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

---

Voltando para  $\mathbb{R}^2$ , se  $P \in \mathcal{L}$ , então

$$(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

Lembrar: Para qualquer vetor  $v = (v_1, v_2)$  podemos construir um ortogonal  $v^\perp = (-v_2, v_1)$ .



# Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

---

Aplicando o produto escalar vezes o vetor ortogonal

$$(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

$$(x_1, x_2) \cdot v^\perp = (a_1, a_2) \cdot v^\perp + t(v_1, v_2) \cdot v^\perp$$

O produto dos vetores  $v \cdot v^\perp = 0$ . Então

$$(x_1, x_2) \cdot (-v_2, v_1) = (a_1, a_2) \cdot (-v_2, v_1)$$

$$-v_2x_1 + v_1x_2 = -v_2a_1 + v_1a_2$$

Como  $v$  e  $a$  são conhecidos, vamos denotar por

$$c = -v_2a_1 + v_1a_2$$

Assim

$$-v_2x_1 + v_1x_2 = c$$

# Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

---

Como é válido para qualquer  $P = (x_1, x_2) \in \mathcal{L}$ ,  
então a reta é definida pela equação

$$\mathcal{L}: -v_2x_1 + v_1x_2 = c$$

Como  $v_1$  e  $v_2$  são números reais denotamos por  
 $a = -v_2$  e  $b = v_1$ , assim temos outra equação

$$\mathcal{L}: ax_1 + bx_2 = c$$

A expressão é chamada de **equação geral** da reta  $\mathcal{L}$ .

Se utilizarmos  $P = (x, y) \in \mathcal{L}$  temos a expressão

$$\mathcal{L}: ax + by = c$$

# Resumo: Equações de uma Reta em $\mathbb{R}^2$

---

Dado um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^2$ , e dado um ponto de passagem fixo  $A$ , então a **equação vetorial** da reta determinada é

$$\mathcal{L}: P = A + tv, t \in \mathbb{R}$$

As **equações paramétricas** da mesma reta são:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

A **equação geral** da reta  $\mathcal{L}$  é

$$\mathcal{L}: -v_2x_1 + v_1x_2 = -v_2a_1 + v_1a_2$$

$$\mathcal{L}: ax_1 + bx_2 = c$$

# Inclinação de uma reta em $\mathbb{R}^2$

---

Dado um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^2$ , e dado um ponto de passagem fixo  $A$ , então da **equação geral** de  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}: -v_2 x_1 + v_1 x_2 = c$$

onde  $c = -v_2 a_1 + v_1 a_2$ .

**Apenas, se  $v_1 \neq 0$** , podemos escrever

$$\mathcal{L}: v_1 x_2 = v_2 x_1 + c$$

$$\mathcal{L}: x_2 = \frac{v_2}{v_1} x_1 + \frac{c}{v_1}$$

Quando utilizamos a expressão  $\mathcal{L}: y = m x + n$

o valor  $m$  é chamado de inclinação da reta  $\mathcal{L}$ . Assim:

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

# Exemplo 1

---

Olhando do alto da linha de produção pode-se observar dois trajetos retos que os colaboradores utilizam para se deslocar. Determine as equações paramétricas das bissetrizes dos trajetos

$$\mathcal{L}_1: 4x - 3y = -10$$

$$\mathcal{L}_2: 7x + y - 20 = 0$$

## Resolução

O que podemos resgatar dos dados?

Vetor ortogonal a reta  $\mathcal{L}_1$ :  $v^\perp = (4, -3)$ , então o vetor direção é  $v = (-3, -4)$ .

# Exemplo 1

---

Vetor ortogonal a reta  $\mathcal{L}_2$ :  $u^\perp = (7,1)$ , então o vetor direção é  $u = (1, -7)$ .

Se igualamos ambas equações gerais das retas, obtemos o **ponto comum** (ponto de interseção)

Se  $R = (r_1, r_2) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$  então

$$\begin{cases} 4r_1 - 3r_2 = -10 \\ 7r_1 + r_2 = 20 \end{cases}$$

A solução dá  $R = (2,6)$

# Voltando na teoria: Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

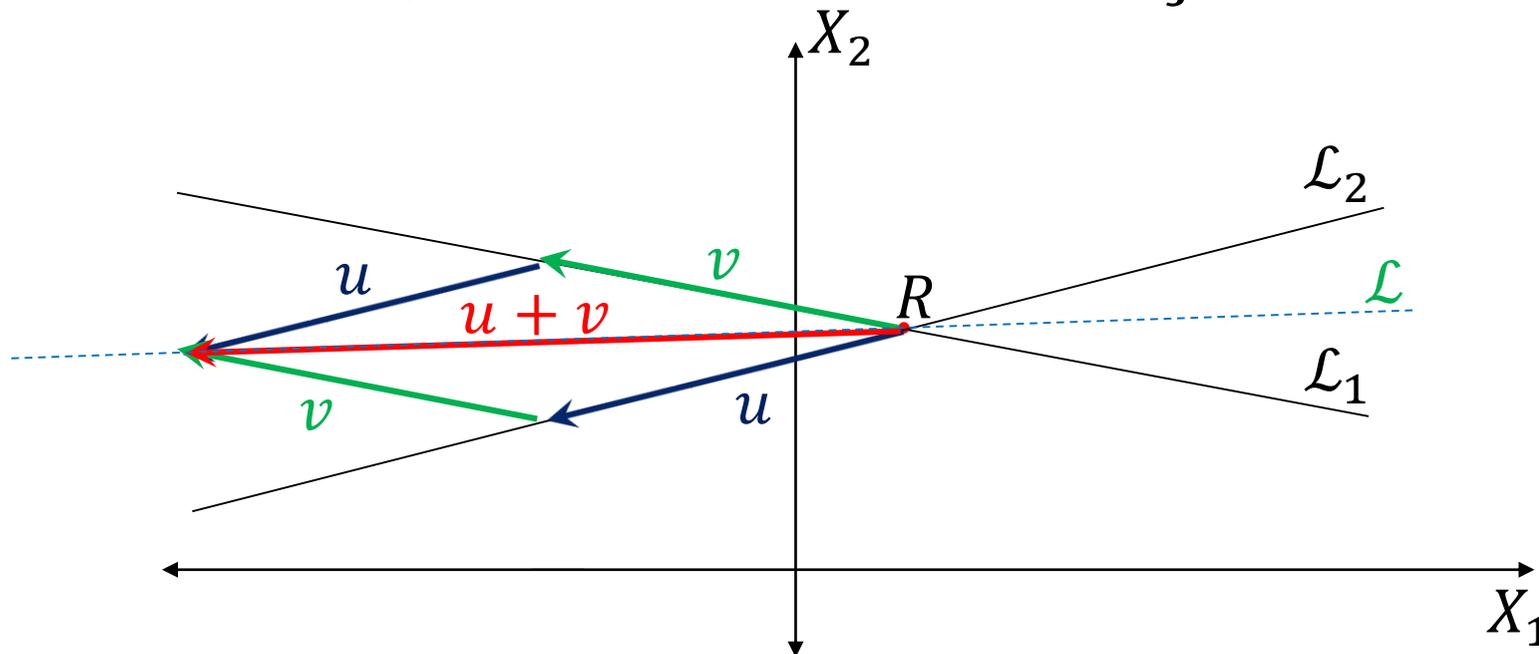
---

Para conhecer a bissetriz entre duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , primeiro precisamos conhecer o ponto de interseção entre elas, a bissetriz passa pelo mesmo ponto. Depois conhecer os vetores de direção das retas mas com **igual medida**, assim a soma dá o vetor direção da bissetriz.

Lembrar: Para todo vetor não nulo  $v$ , podemos construir o seu vetor unitário, medida:  $\|v_u\| = 1$ .

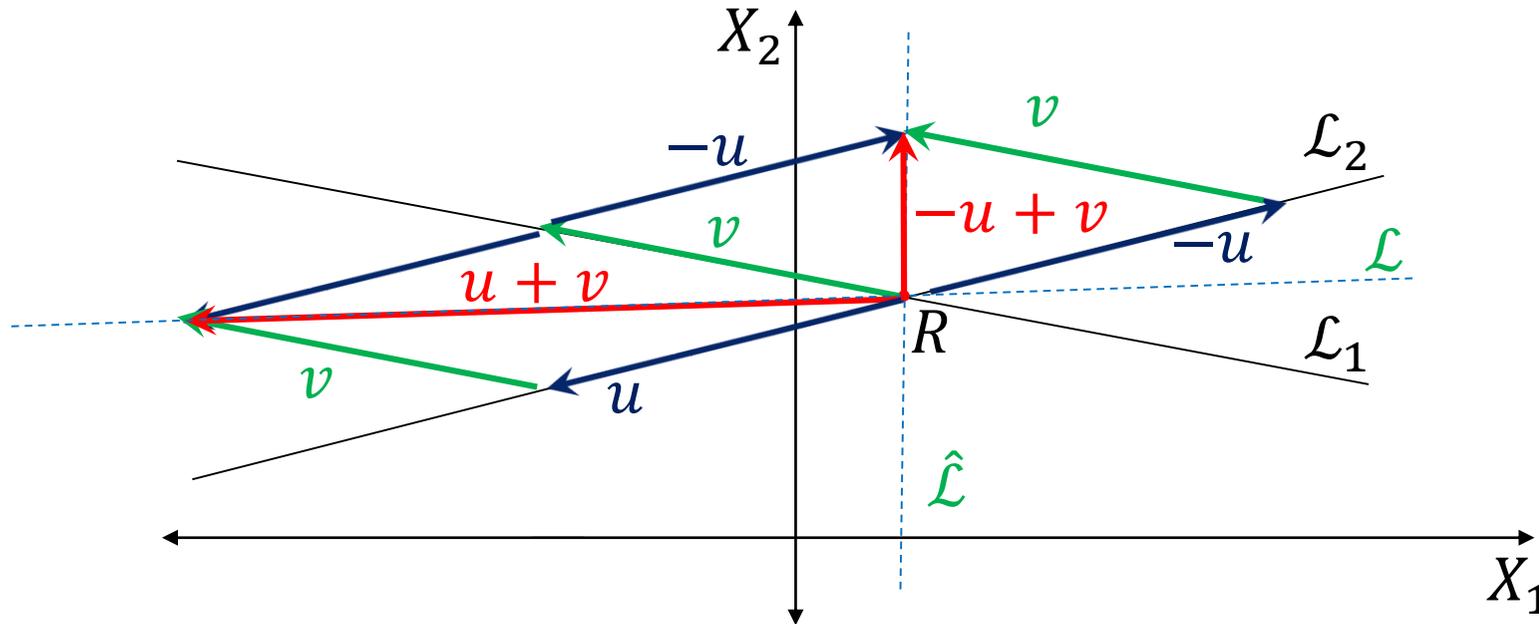
# Primeira Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

A bissetriz  $\mathcal{L}$ , entre as duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , passa pelo ponto comum às retas, e somando vetores do **mesmo tamanho** temos a bissetriz do ângulo entre os vetores, e será o vetor de direção da bissetriz  $\mathcal{L}$ .



# Segunda Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

A bissetriz  $\hat{\mathcal{L}}$ , entre as duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , passa pelo ponto comum às retas, e seu vetor de direção é o vetor soma do vetor de uma das retas e o inverso aditivo do vetor da outra reta (mesma medida)



# Resolvendo o Exemplo

---

## **Voltando ao problema:**

Olhando do alto da linha de produção pode-se observar dois trajetos retos que os colaboradores utilizam para se deslocar. Determine as equações paramétricas das bissetrizes dos trajetos

$$\mathcal{L}_1: 4x - 3y = -10$$

$$\mathcal{L}_2: 7x + y - 20 = 0$$

## **Resolução** (continuação)

Vetores unitários  $v_u = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  e  $u_u = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$

Ponto comum  $R = (2,6)$ .

# Resolvendo o Exemplo

---

O vetor de direção da primeira bissetriz é a soma

$$w = v_u + u_u = \left( \frac{-6+\sqrt{2}}{10}, \frac{-8-7\sqrt{2}}{10} \right)$$

As equações paramétricas são:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = 2 + \left( \frac{\sqrt{2}-6}{10} \right) t \\ x_2 = 6 - \left( \frac{8+7\sqrt{2}}{10} \right) t \end{cases}$$

Para a segunda bissetriz, um vetor de direção é

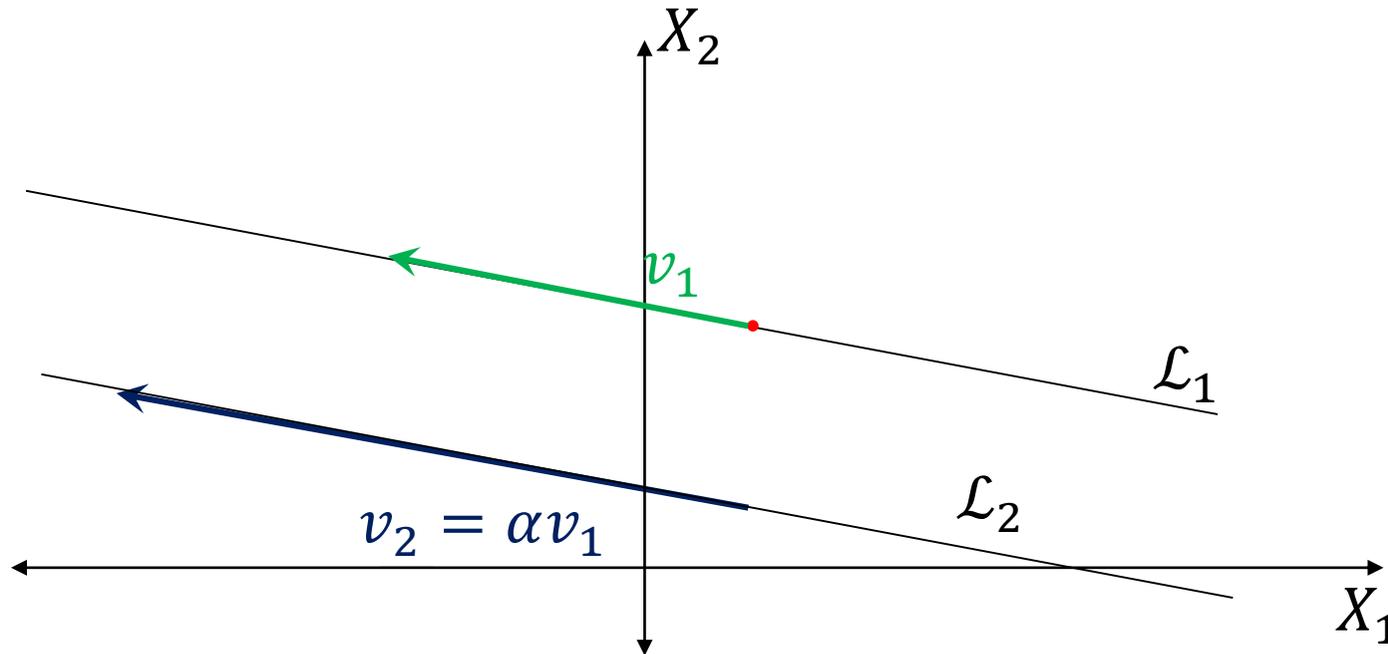
$$\hat{w} = -u_u + v_u.$$

# Retas paralelas em $\mathbb{R}^2$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre si.

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

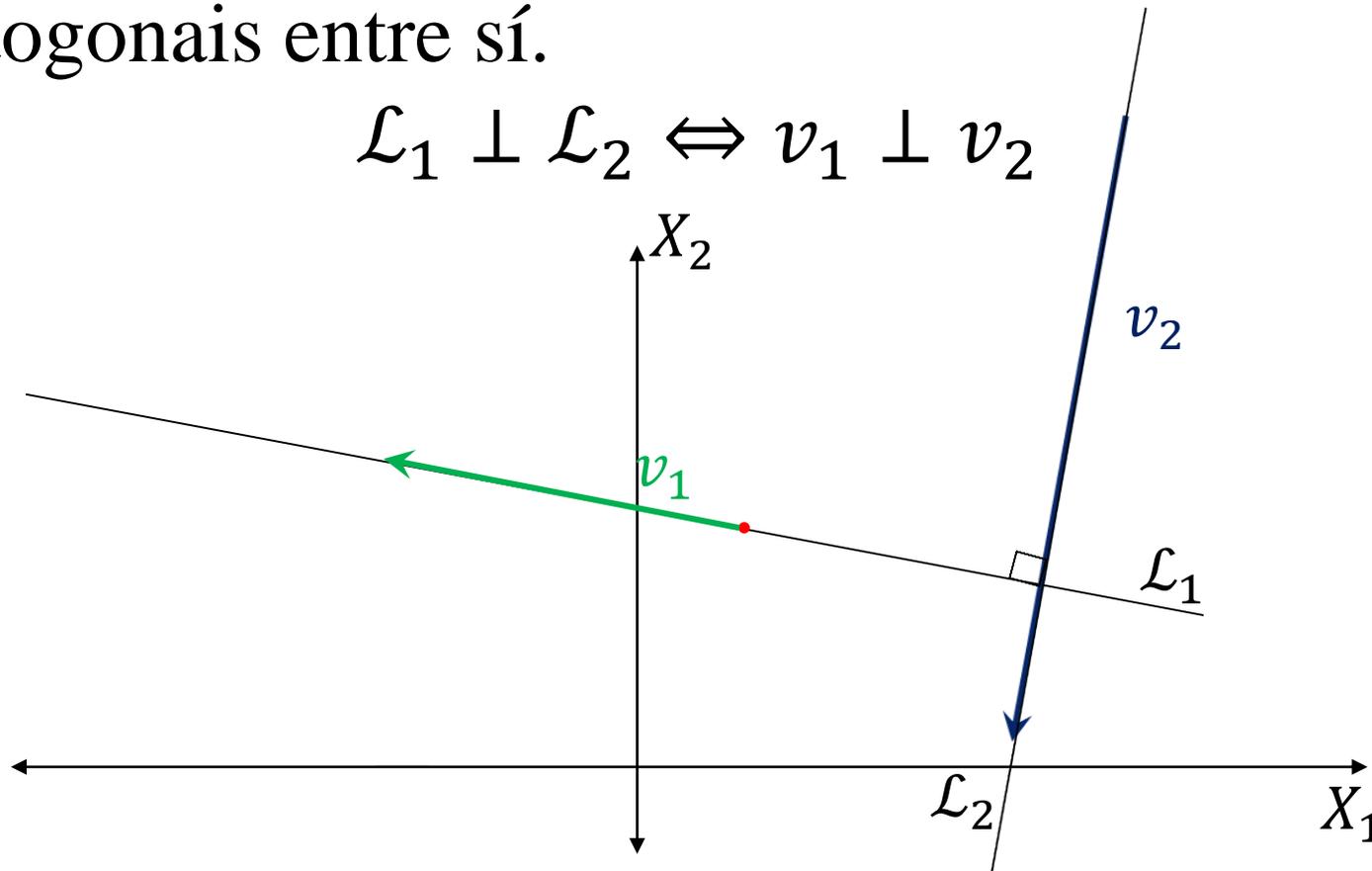


# Retas ortogonais em $\mathbb{R}^2$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , são **ortogonais** se seus vetores de direção são ortogonais entre si.

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

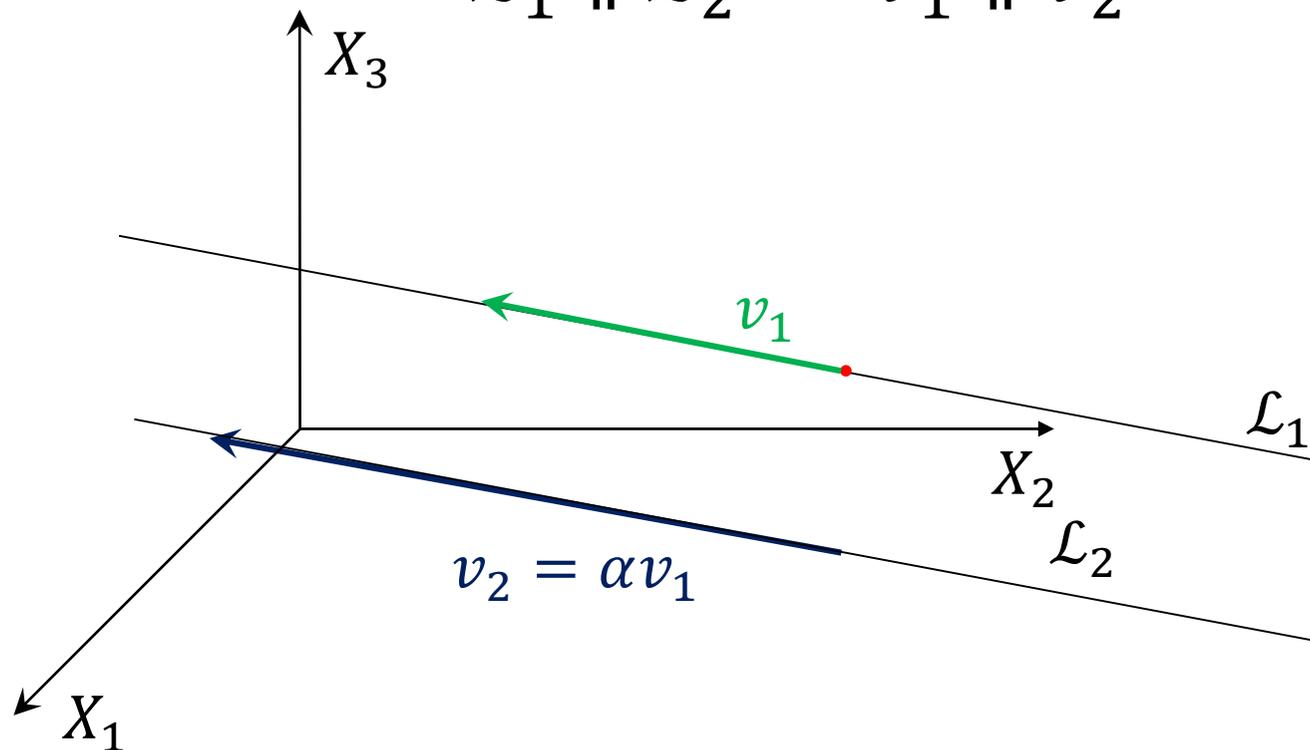


# Retas paralelas em $\mathbb{R}^3$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre si.

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

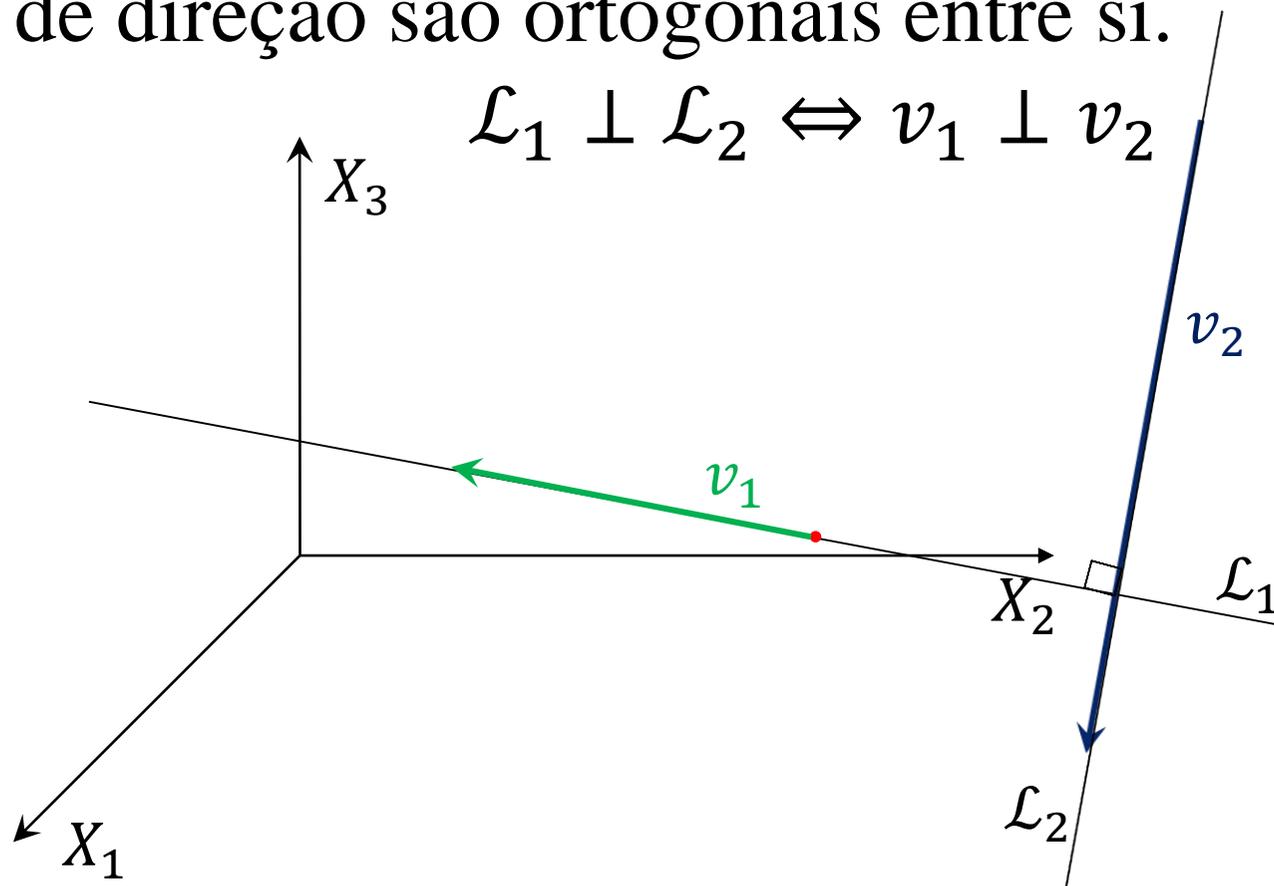


# Retas ortogonais em $\mathbb{R}^3$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , são **ortogonais** se tem um ponto comum e seus vetores de direção são ortogonais entre si.

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$



# Retas paralelas e ortogonais em $\mathbb{R}^n$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre si.

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

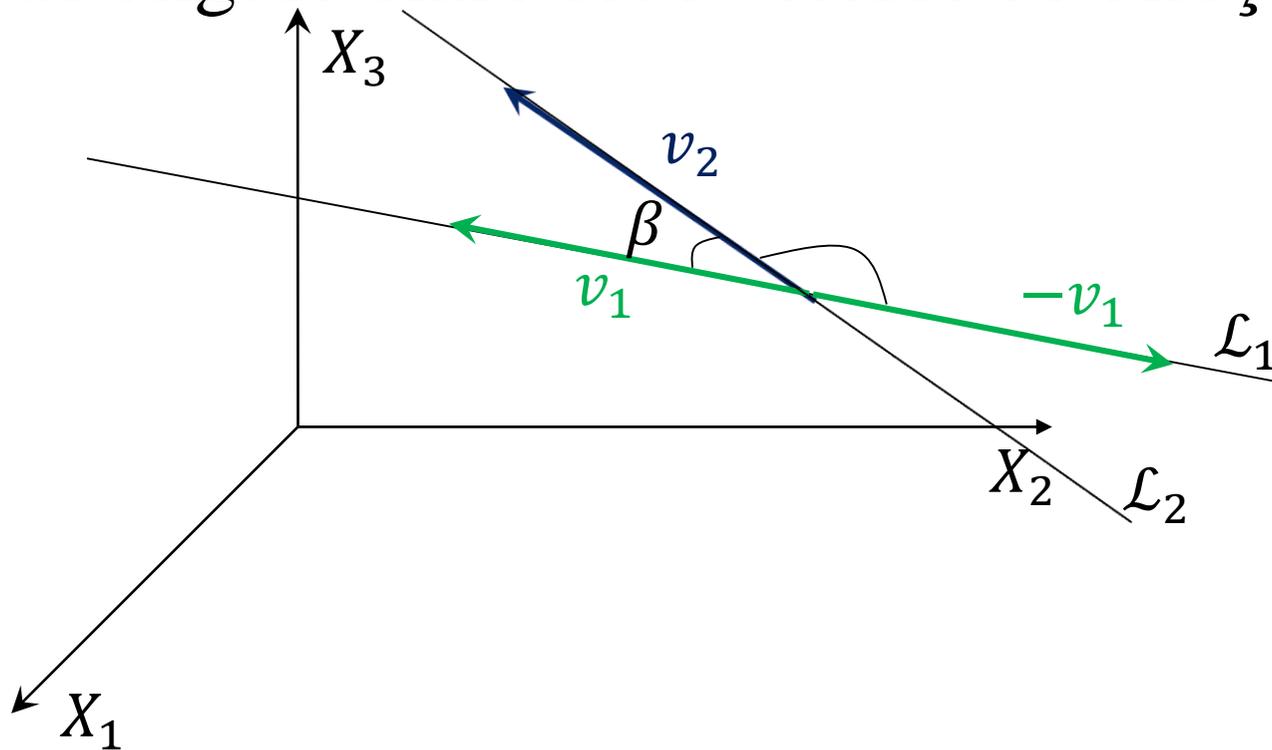
Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , são **ortogonais** se tem um ponto comum e seus vetores de direção são ortogonais entre si.

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

# Ângulo entre retas em $\mathbb{R}^n$

---

Duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , formam dois ângulo entre elas, se existe um ponto comum entre elas. Chamaremos de ângulo entre as retas, ao ângulo entre seus vetores de direção com  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$



# Enunciado do Exemplo 2

---

## Problema

O ângulo entre duas retas é  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , a primeira reta passa pelo ponto  $A = (a, 0)$ ,  $a < 0$ , a segunda reta passa pelo ponto  $C = (0, 5)$ , e o ponto  $B$  (no segundo quadrante) pertence as duas retas.

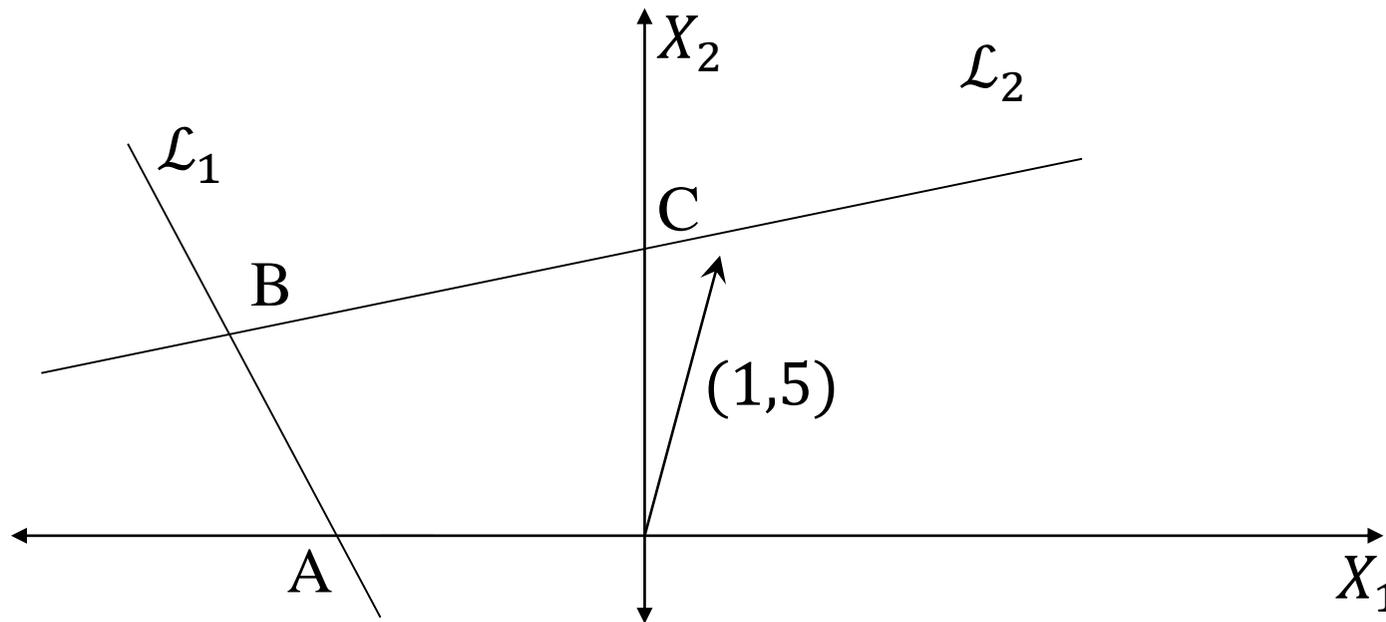
Sabendo que  $AB + BC \parallel (1, 5)$ , e a inclinação da primeira reta é  $-3$ , determine a equação vetorial da bissetriz em  $\alpha$ .

## Exemplo 2

---

**Resolução:** Dados:  $C = (0,5)$   $A = (a, 0)$ ,  $a < 0$

Sabemos que o ponto  $A$  tem primeira componente negativa e está sobre o eixo  $X_1$ , mas existem muitas possibilidades, analisemos mais um pouco:



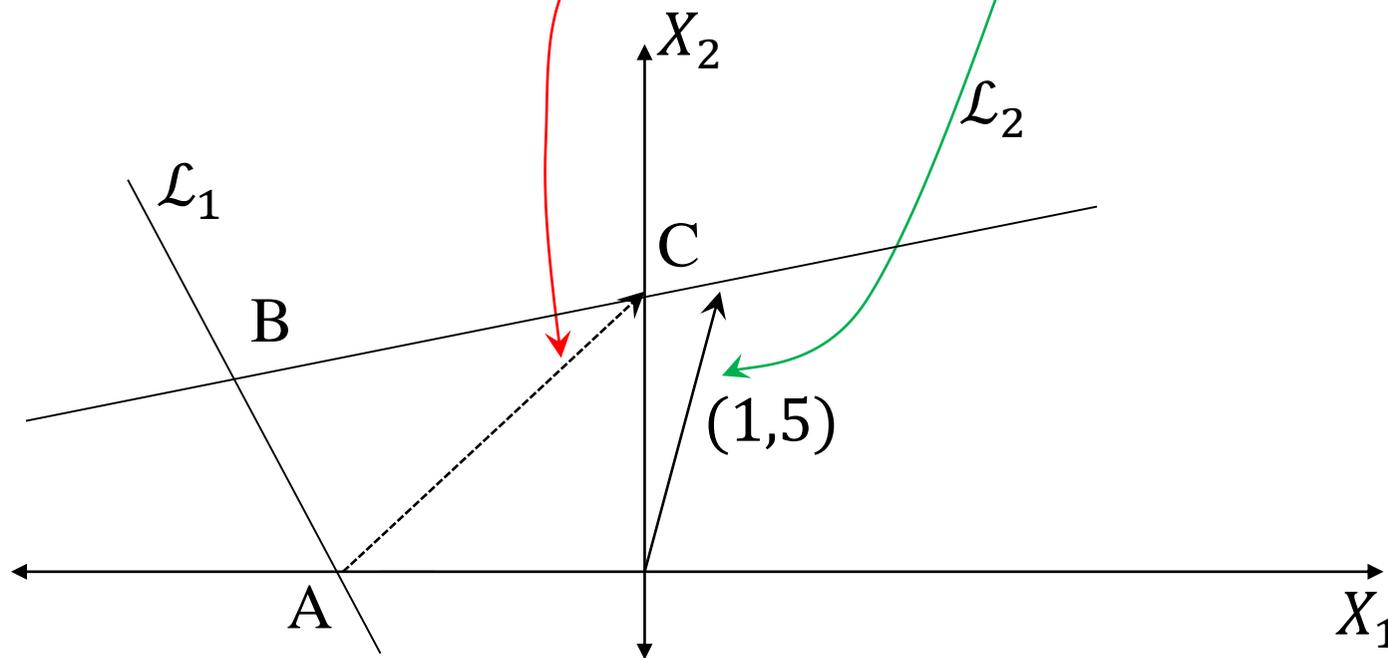
# Exemplo 2

---

A seguinte informação é uma grande ajuda.

No desenho, não temos o paralelismo informado:

$$AB + BC = AC \parallel (1,5)$$

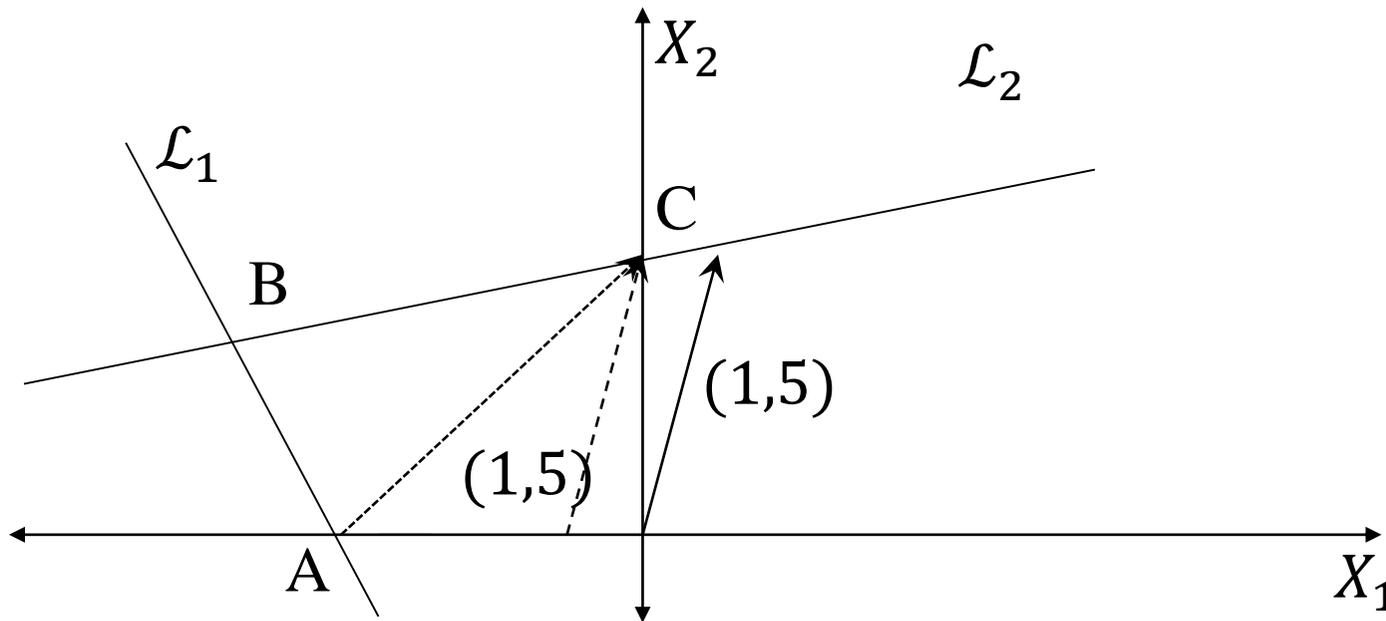


## Exemplo 2

---

Então, é uma boa estratégia deslocar o vetor  $(1,5)$ , até passar pelo ponto  $C$  conhecido.

Assim, podemos visualizar a posição real do ponto  $A$

$$AB + BC = AC \parallel (1,5)$$


## Exemplo 2

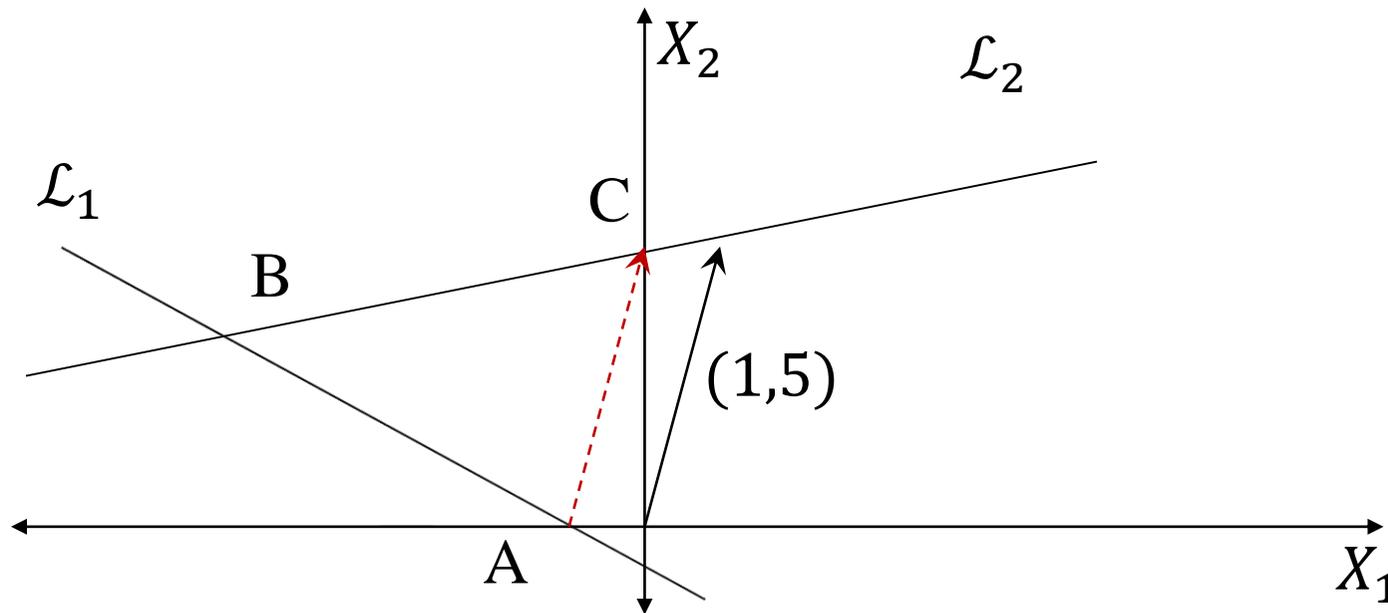
---

Temos a localização correta do ponto  $A$ .

Como  $AC \parallel (1,5)$ , temos  $C - A = (-a, 5) = \beta(1,5)$

Então:  $5 = 5\beta$  logo  $\beta = 1$ .

Também  $-a = \beta = 1$ . Portanto  $A = (-1,0)$



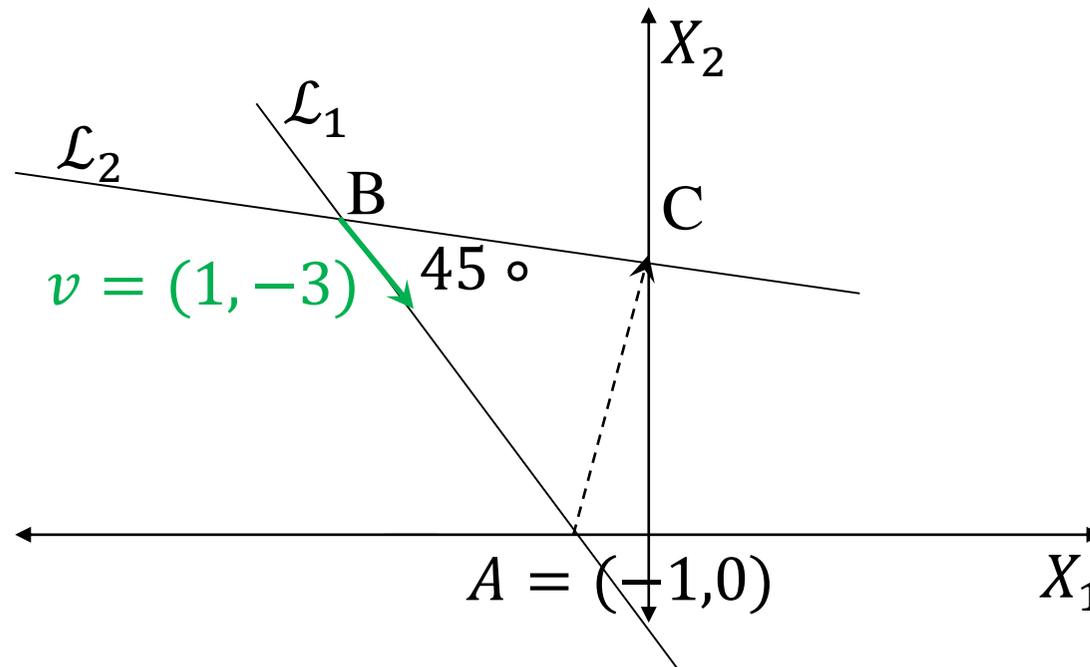
## Exemplo 2

---

Utilizando a inclinação de  $\mathcal{L}_1$ , obtemos um vetor

$$m = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow -3 = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow v = (1, -3)$$

$v$  é um vetor de direção de  $\mathcal{L}_1$ , orientamos de forma correta  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  pois conhecemos o ângulo

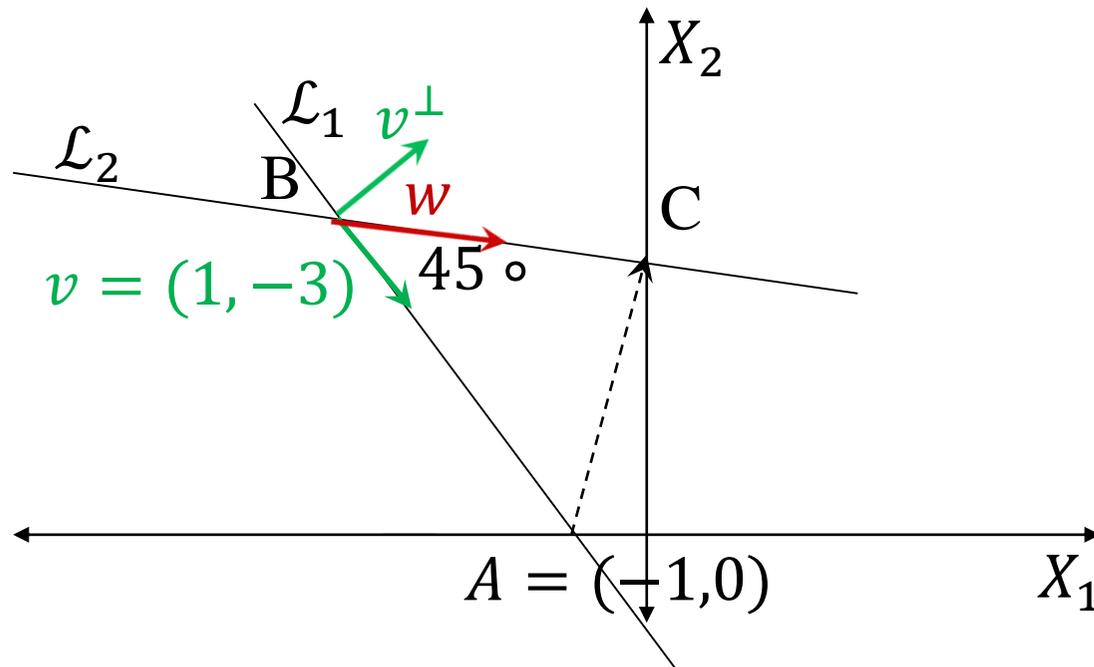


## Exemplo 2

---

Como o vetor  $BC$  é um vetor de direção da reta  $\mathcal{L}_2$ , e forma um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ , ele é paralelo ao vetor soma de  $v$  e  $v^\perp$ , pois eles medem igual e formam  $\frac{\pi}{2}$ :

$$w = v + v^\perp = (1, -3) + (3, 1) = (4, -2)$$



# Exemplo 2

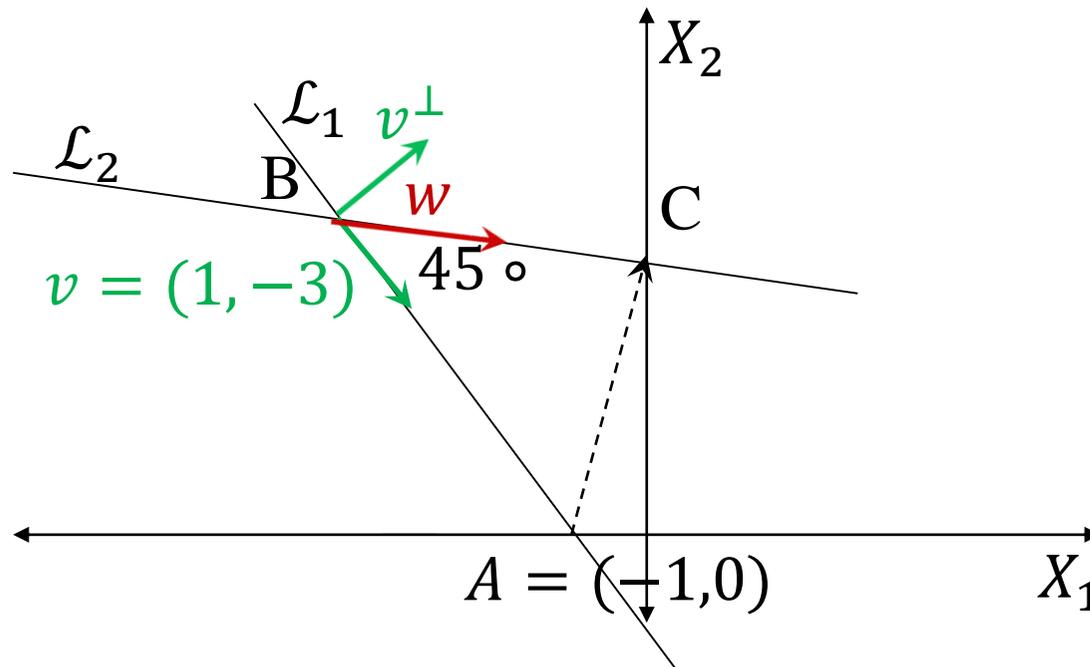
---

Fazendo  $B = (b_1, b_2)$ , temos

$$BA = (-1 - b_1, -b_2) \perp (3, 1) \Rightarrow 3b_1 + b_2 = -3$$

$$BC = (-b_1, 5 - b_2) \perp (2, 4) \Rightarrow b_1 + 2b_2 = 10$$

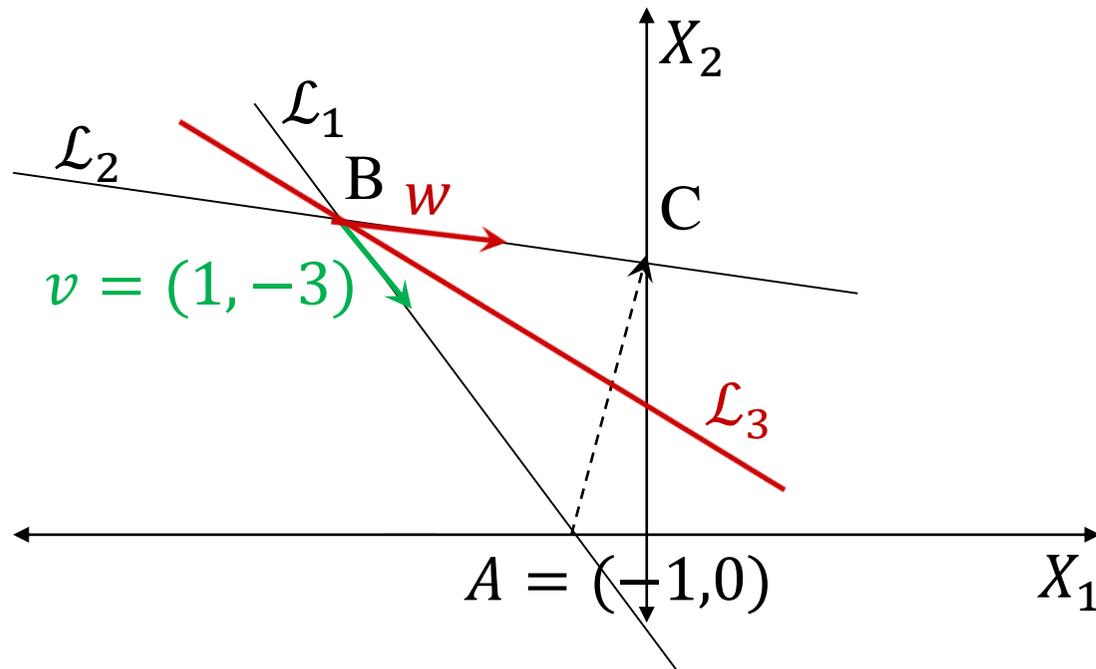
Resolvendo o sistema:  $B = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right)$



## Exemplo 2

---

Para determinar a bissetriz  $\mathcal{L}_3$  entre as retas, já temos ponto de passagem  $B = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right)$ . O vetor de direção  $u$  será o vetor soma dos vetores unitários de  $v$  e  $w$ :  $u = v_u + w_u$



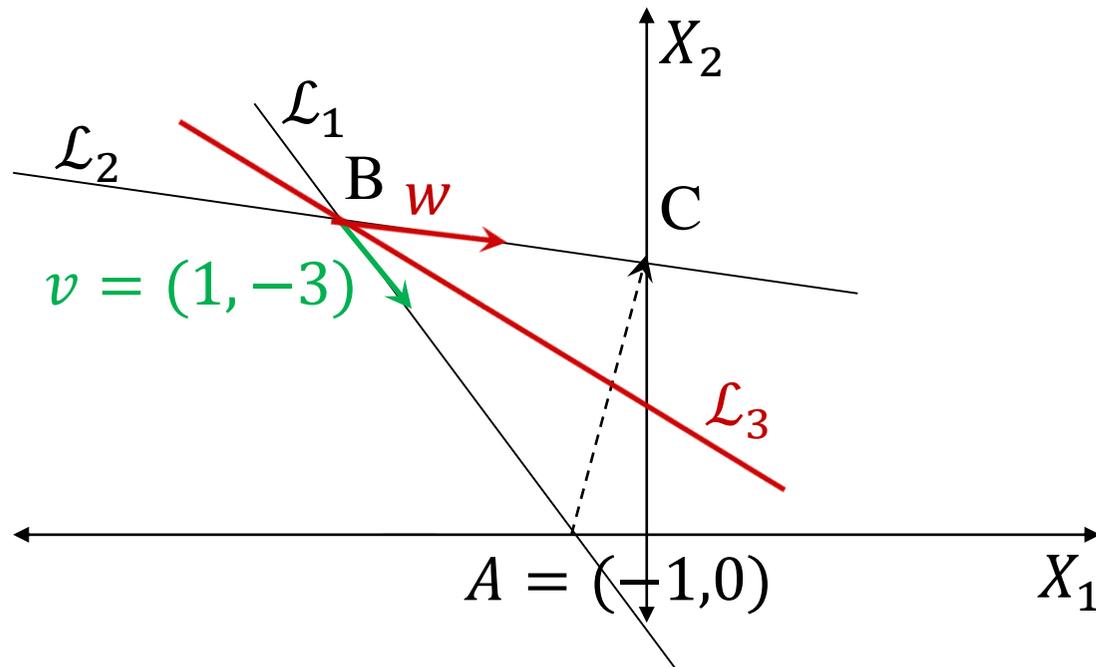
# Exemplo 2

---

Calculando os vetores unitários:

$$v_u = \frac{1}{\|(1, -3)\|} (1, -3) = \left( \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$w_u = \frac{1}{\|(4, -2)\|} (4, -2) = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$



# Exemplo 2

---

$$u = \frac{\sqrt{5}}{10}(4 + \sqrt{2}, -2 - 3\sqrt{2})$$

Assim

$$\mathcal{L}_3: P = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right) + t(4 + \sqrt{2}, -2 - 3\sqrt{2}) \quad t \in \mathbb{R}$$

