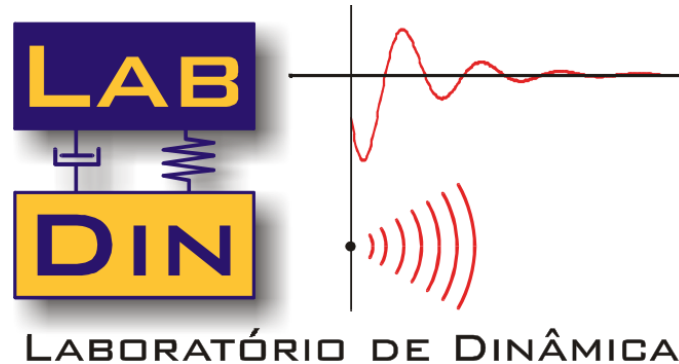


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



**SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I**  
**SEM 0232 – Modelos Dinâmicos**

***Modelagem de Sistemas Eletromecânicos***  
***Teoria***

# Objetivos

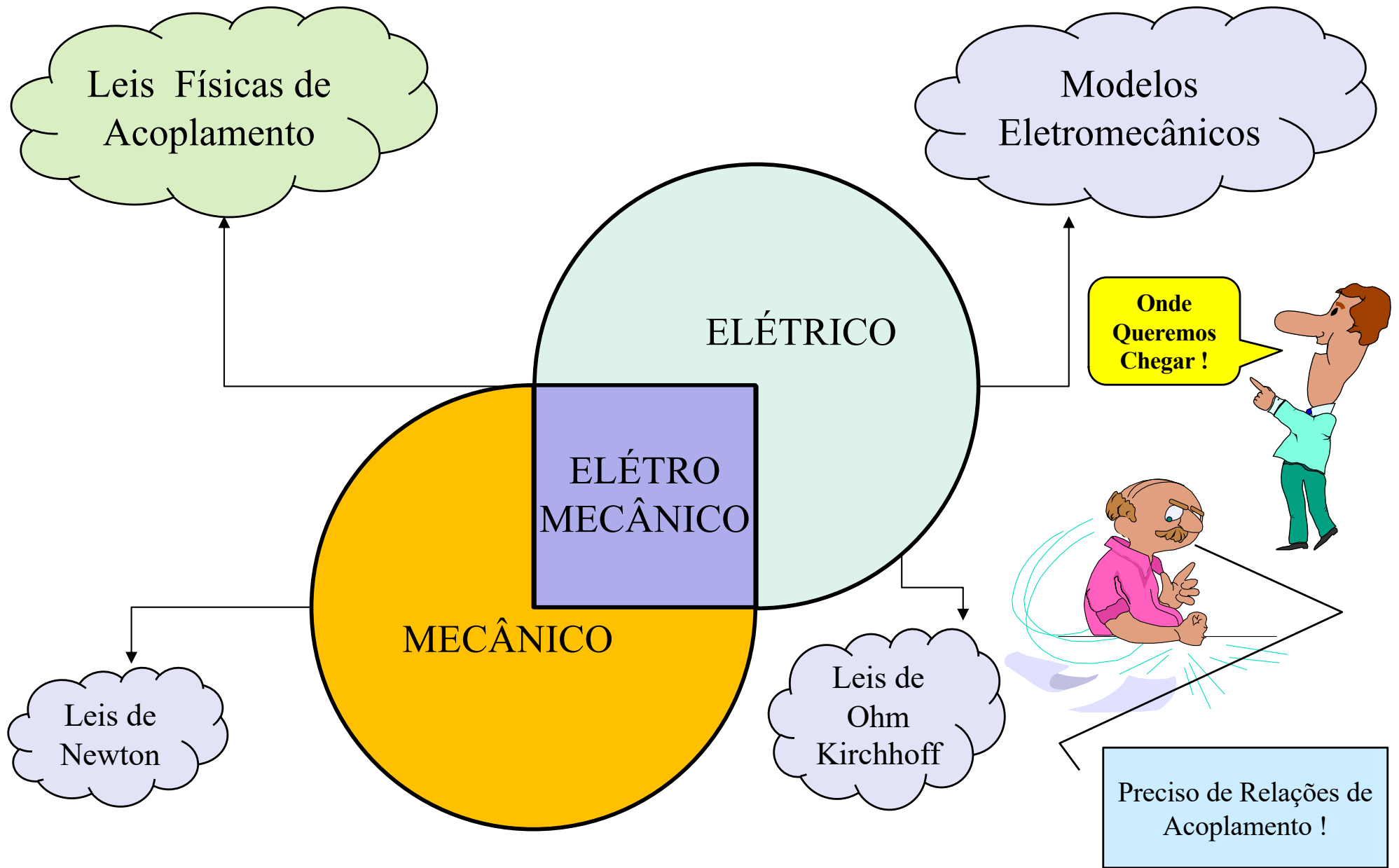
---

O objetivo principal desta aula é discutir conceitos teóricos adicionais para a modelagem de sistemas eletromecânicos. Tais sistemas desempenham papel importante no contexto de aplicações tecnológicas nas áreas de engenharia mecânica e mecatrônica. É importante salientar que, para a modelagem de tais sistemas, é de fundamental importância observarmos *relações multi-físicas de acoplamento* que servirão de base para o desenvolvimento dos modelos.

## Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

# Interação entre Domínios



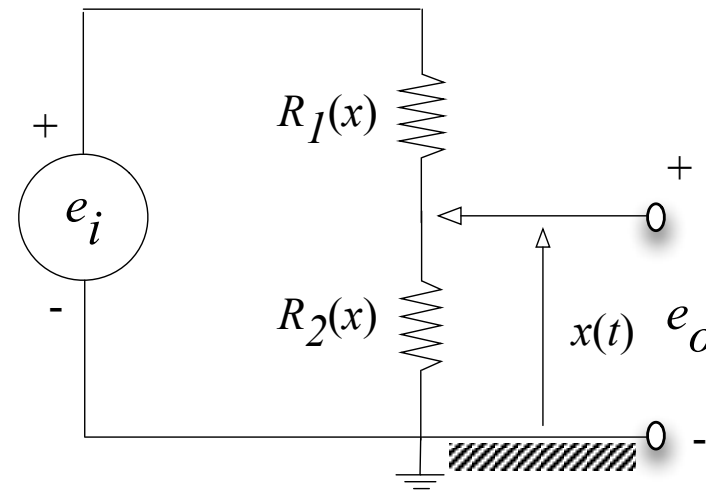
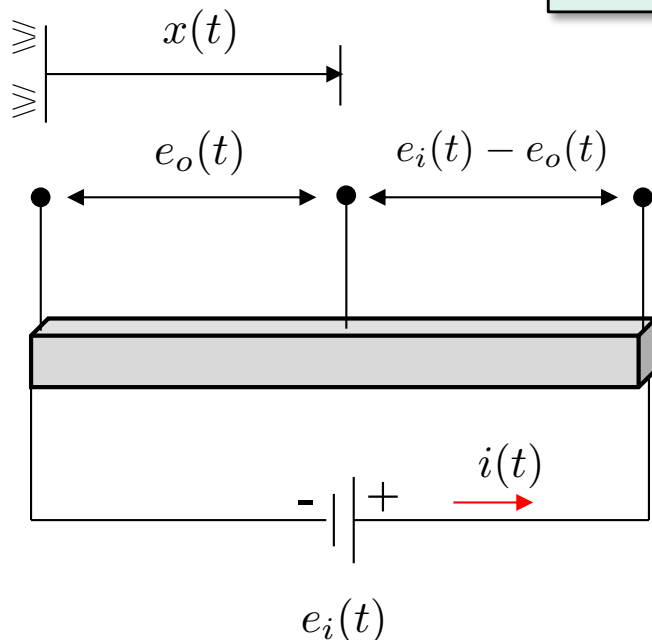
# Acoplamento Resistivo

A idéia aqui é desenvolvermos um modelo de resistência variável (*potenciômetro*):

Potenciômetro Linear

$$R(x) = \left( \frac{\rho}{A} \right) x(t)$$

$\rho$  – resistividade do material  
 $A$  – área da secção transversal



$$e_o(t) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e_i(t)$$



$$e_o(t) = \left( \frac{1}{x_{max}} \right) x(t) e_i(t)$$

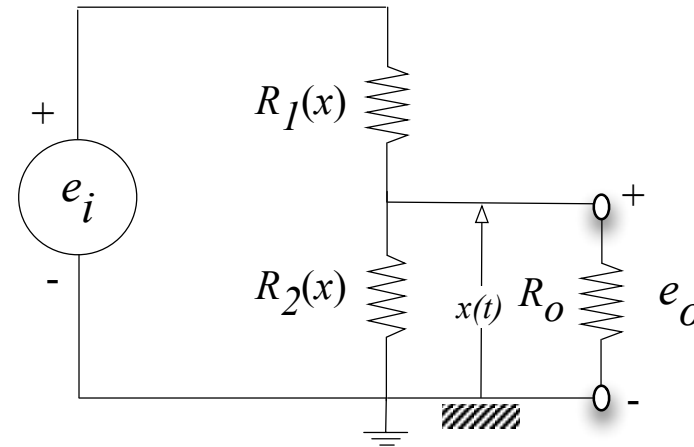
$$R_2 = \left( \frac{R_T}{x_{max}} \right) x(t)$$

$$R_T = R_1 + R_2$$

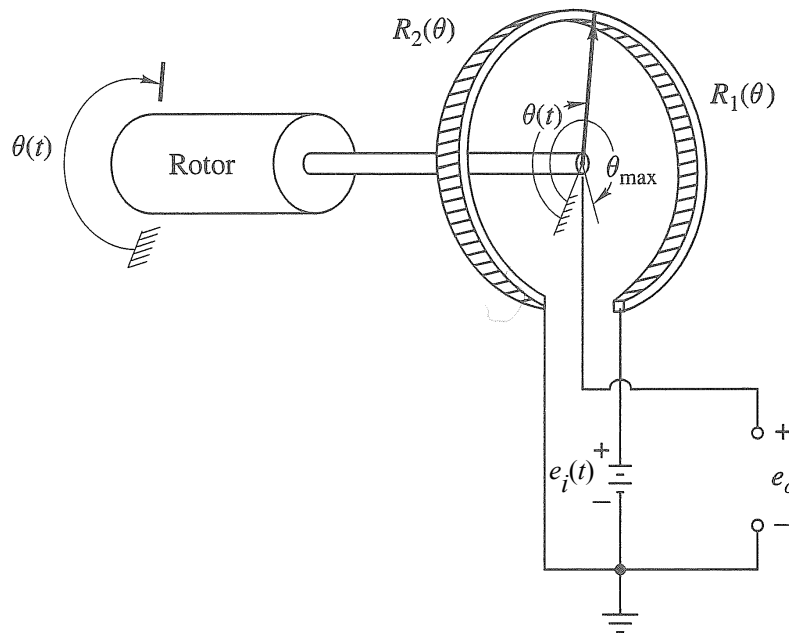
# Acoplamento Resistivo

Obs: Sobre o efeito de carga:

A medição de  $e_o(t)$  se faz conectando-se um instrumento ao circuito. Para que a relação entre  $e_o$  e  $x(t)$  continue válida devemos ter  $R_o \gg R_T$  !



Potenciômetro Angular :



$$R_2 = \left( \frac{R_T}{\theta_{max}} \right) \theta(t)$$

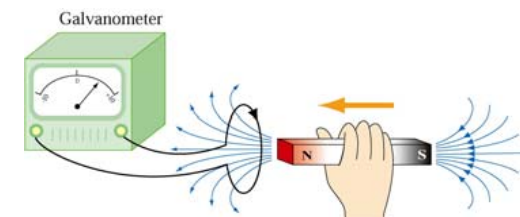
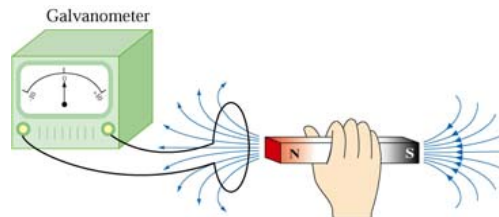
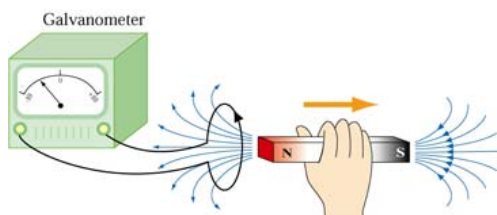
$$R_T = R_1 + R_2$$

$$e_o(t) = \left( \frac{1}{\theta_{max}} \right) \theta(t) e_i(t)$$

# Acoplamento Magnético

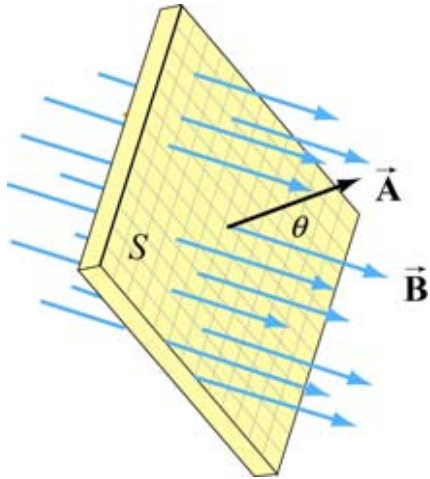
Motivação: Grande parte de sistemas eletromecânicos contém condutores elétricos que deslocam-se em campos magnéticos e, em decorrência, tensões induzidas e forças mecânicas surgem devido às interações (acoplamento) entre os meios elétrico, magnético e mecânico.

Lei de Faraday-Lenz: A variação temporal de um campo magnético gera um campo elétrico associado.



## Cont. ...

Fluxo Magnético:



$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Campo Magnético Uniforme:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \theta$$

Tensão Induzida:

Faraday  $\longrightarrow$   $\overset{\text{Lenz}}{\uparrow} e_{fem} = - \overset{\text{Fluxo Magnético}}{\nearrow} \frac{d\Phi_B}{dt}$

$$e_{fem} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$N$  – N° voltas  
da bobina

## Cont. ...

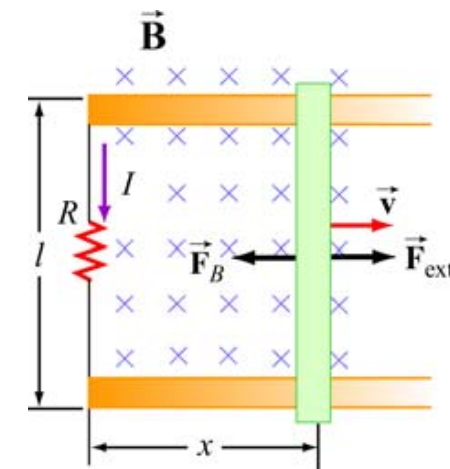
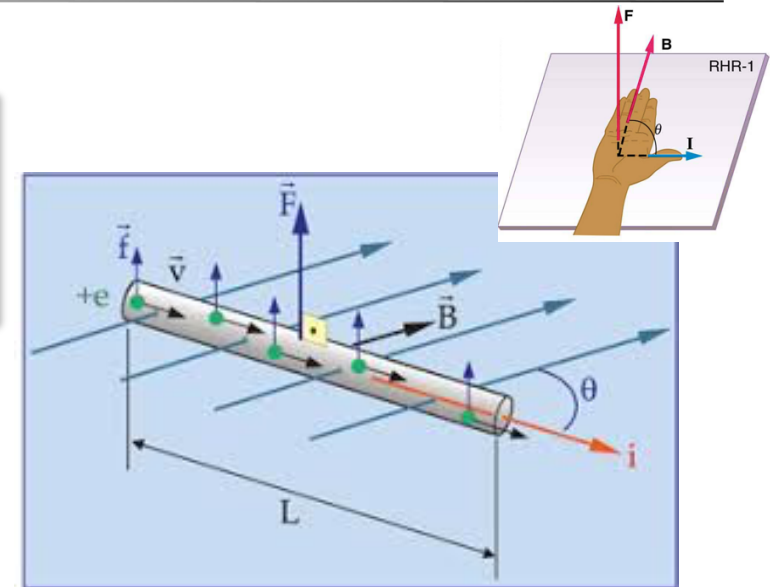
Condutor percorrido corrente elétrica e imerso em um campo magnético sofre a ação de uma força de natureza magnética

$$f_e = \mathcal{B}il \sin\theta$$

Para um condutor em movimento perpendicular a um campo magnético surge uma tensão induzida

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}A = \mathcal{B}lx$$

$$e_{fem} = \frac{d\Phi_{\mathcal{B}}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\mathcal{B}lx) = -\mathcal{B}l\frac{dx}{dt} = -\mathcal{B}lv$$

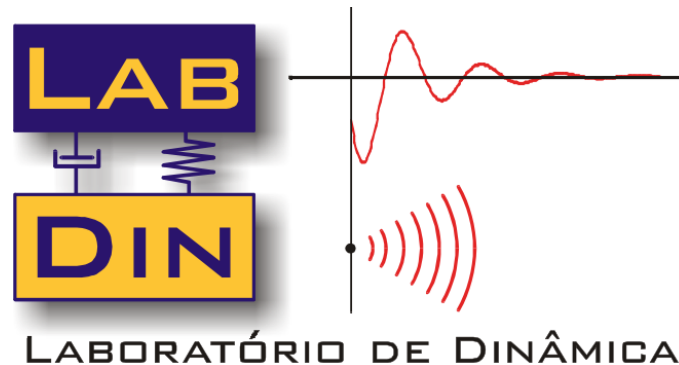


---

# FIM

## Bom Estudo !

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

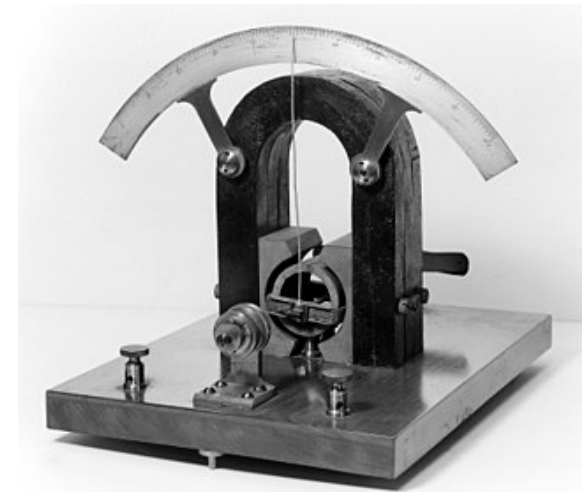
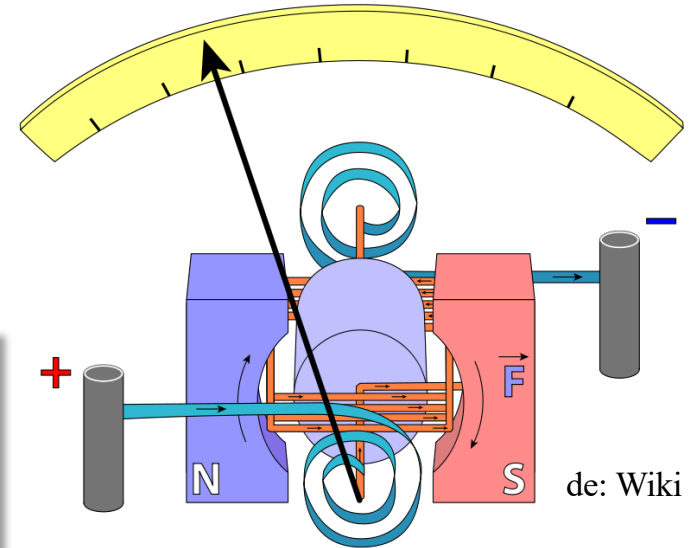
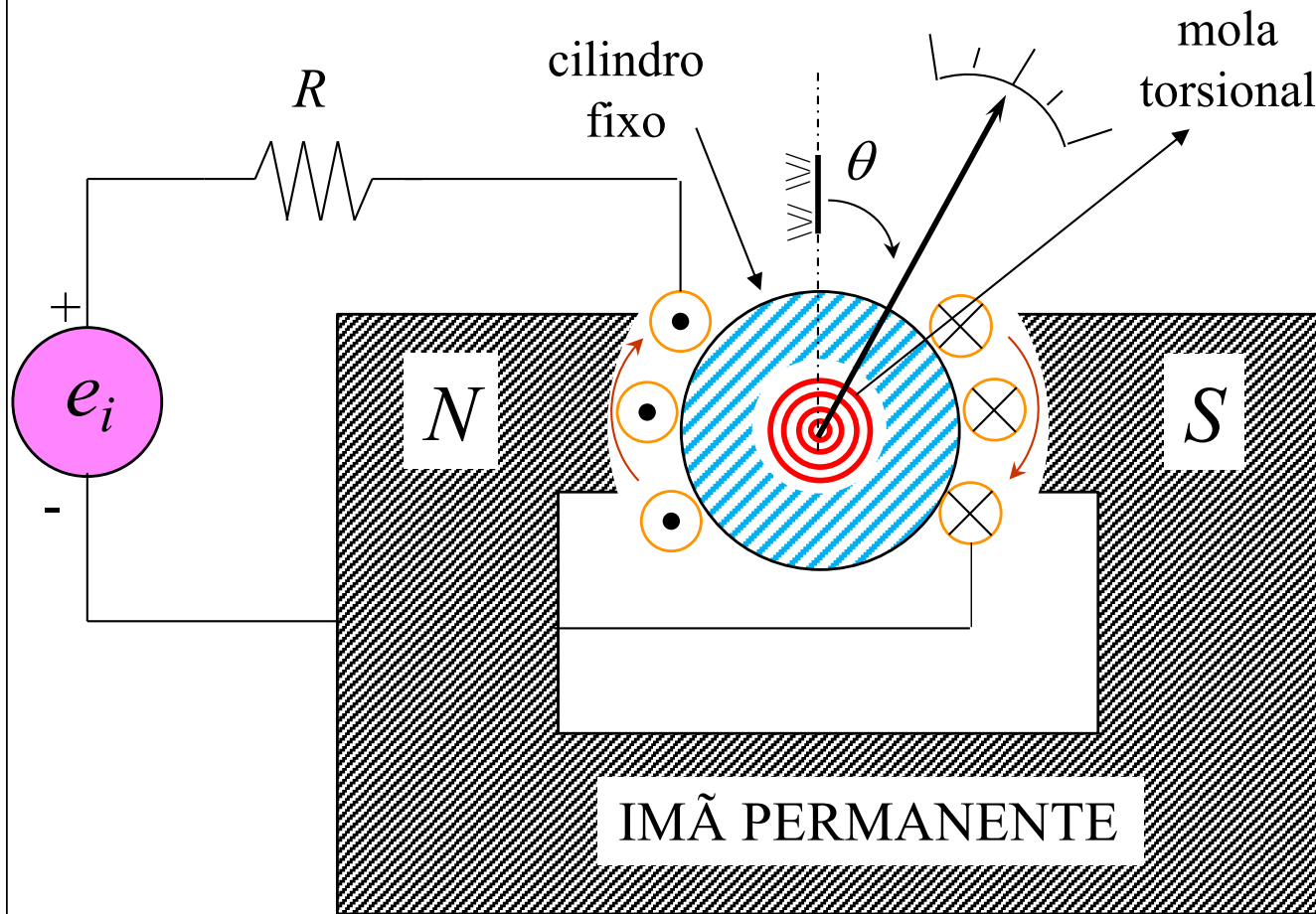


**SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I**  
**SEM 0232 – Modelos Dinâmicos**

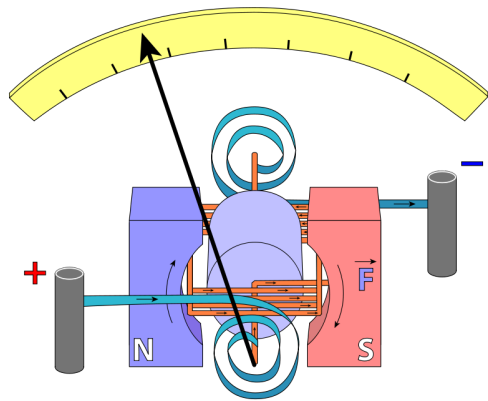
***Modelagem de Sistemas Eletromecânicos***  
***Exemplo: O Galvanômetro***

# Exemplo: O Galvanômetro

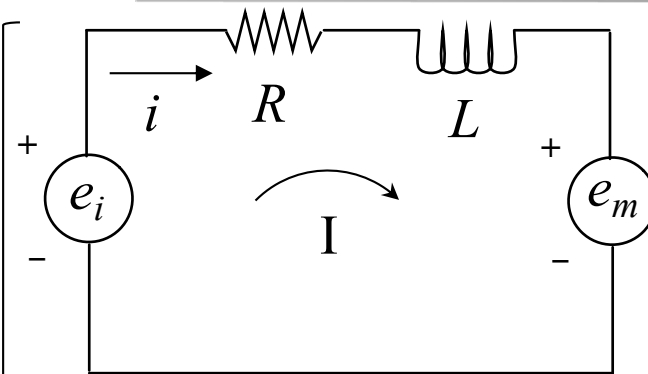
Sistema eletromecânico para detecção de uma corrente elétrica



# Cont. ...



Elétrico



$$\sum_I e_I = 0$$

$$-e_i + Ri + L \frac{di}{dt} + e_m = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + (2N\mathcal{B}la)\dot{\theta}_o = e_i(t)$$

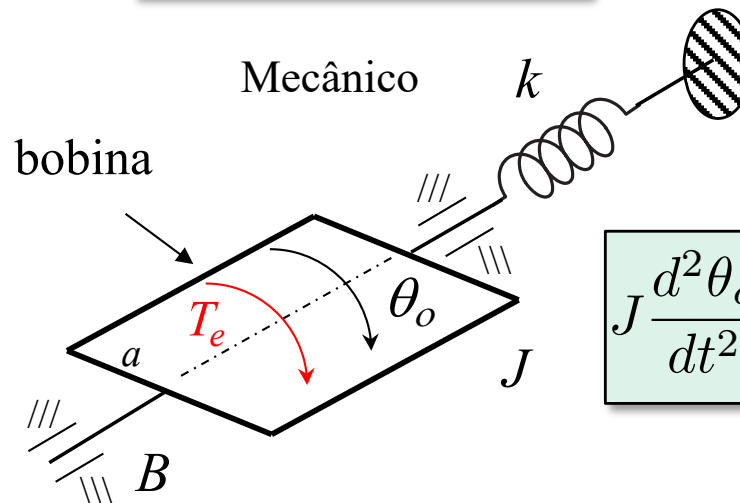
Acoplamento

$$e_m = (2N\mathcal{B}la)\dot{\theta}_o$$

$$T_e = (2N\mathcal{B}la)i$$

$$\sum_J \vec{T} = J \frac{d^2 \vec{\theta}_o}{dt^2}$$

Mecânico



$$T_e - B\dot{\theta}_o - k\theta_o = J\ddot{\theta}_o$$

$$J \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + B \frac{d\theta_o}{dt} + k\theta_o = (2N\mathcal{B}la)i$$

## Cont. ...

Aplicando a T. L. às equações temos:

$$(Js^2 + Bs + k) \Theta_o(s) = k_e I(s) \quad k_e = 2N\mathcal{B}la$$

$$(Ls + R)I(s) + k_e s \Theta_o(s) = E_i(s) \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{E_i(s) - k_e s \Theta_o(s)}{Ls + R}$$

Substituindo  $I(s)$  na primeira equação temos a F.T. relacionando  $\Theta_o(s)$  a  $E_i(s)$

$$\frac{\Theta_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{k_e^2}{Rk}}{\frac{JL}{Rk}s^4 + \frac{BL}{Rk}s^3 + \frac{1}{Rk}(JR + JL)s^2 + \frac{1}{Rk}(BR + k_e^2)s + 1}$$

e, se os efeitos indutivos forem desprezados  $L \approx 0$

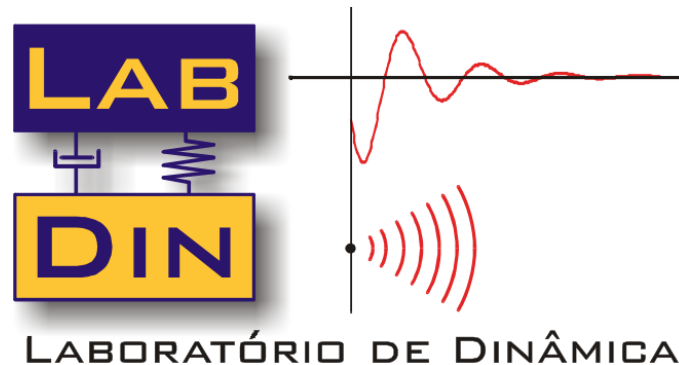
$$\frac{\Theta_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{k_e^2}{Rk}}{\frac{J}{k}s^2 + \left(\frac{B}{k} + \frac{k_e^2}{Rk}\right)s + 1}$$

---

# FIM

## Bom Estudo !

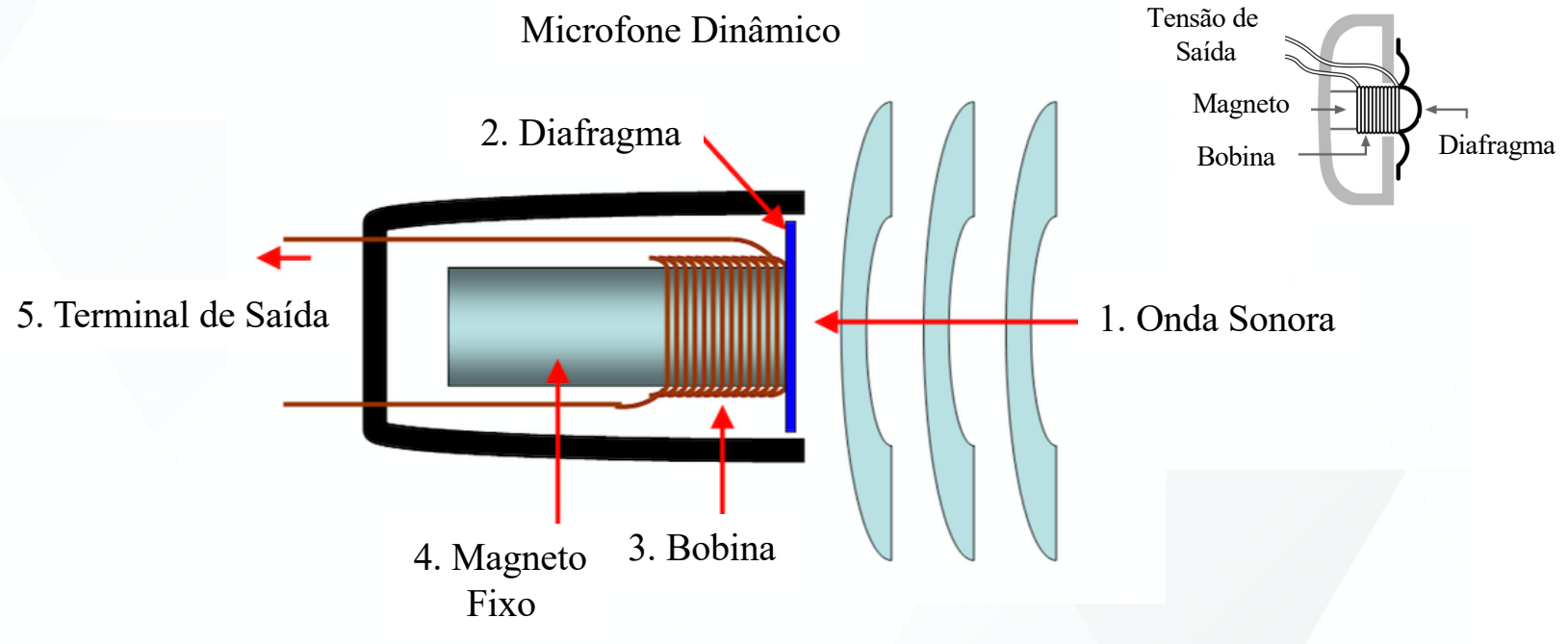
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



**SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I**  
**SEM 0232 – Modelos Dinâmicos**

***Modelagem de Sistemas Eletromecânicos***  
***Exemplo: O Microfone de Indução***

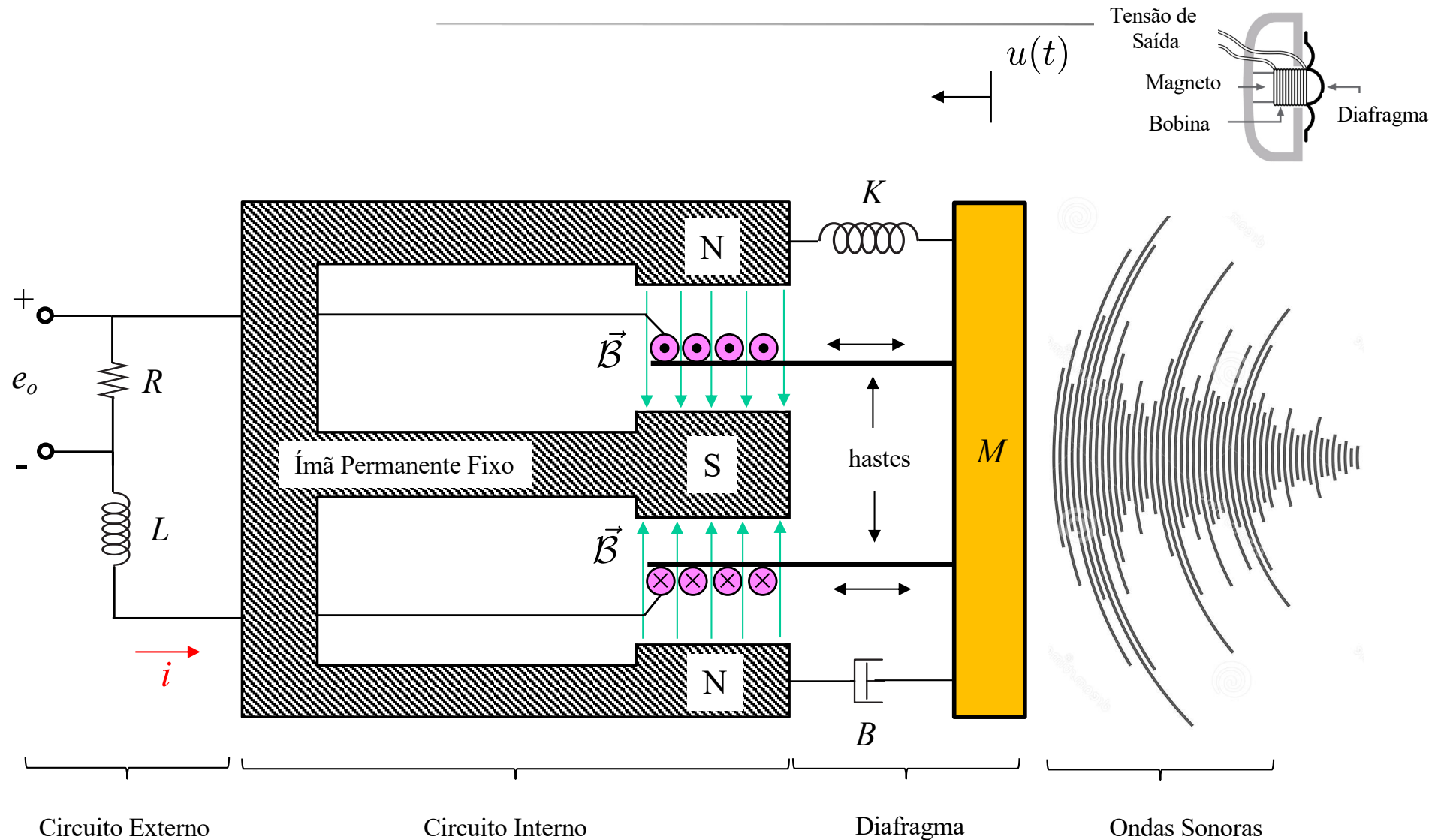
# Exemplo: Microfone de Indução



Hipóteses Simplificadoras:

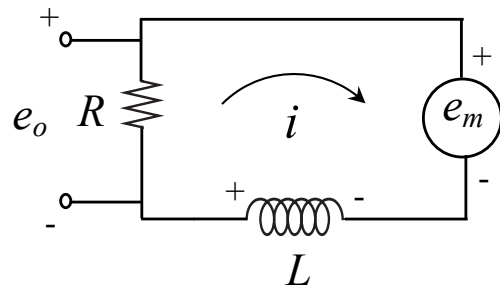
1. Diafragma possui movimento de translação
2. Diafragma conectado à bobina por hastes rígidas e sem massa
3. Diafragma conectado ao magneto por mola e amortecedor puros e ideais
4. Resistência da bobina desprezível
5. Indutância da bobina considerada pura e ideal

# Modelo Físico do Microfone



# Modelo Matemático

Elétrico



$$\sum_I e_I = 0$$

$$-e_o + e_m - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri - e_m = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri - k_e \dot{u} = 0$$

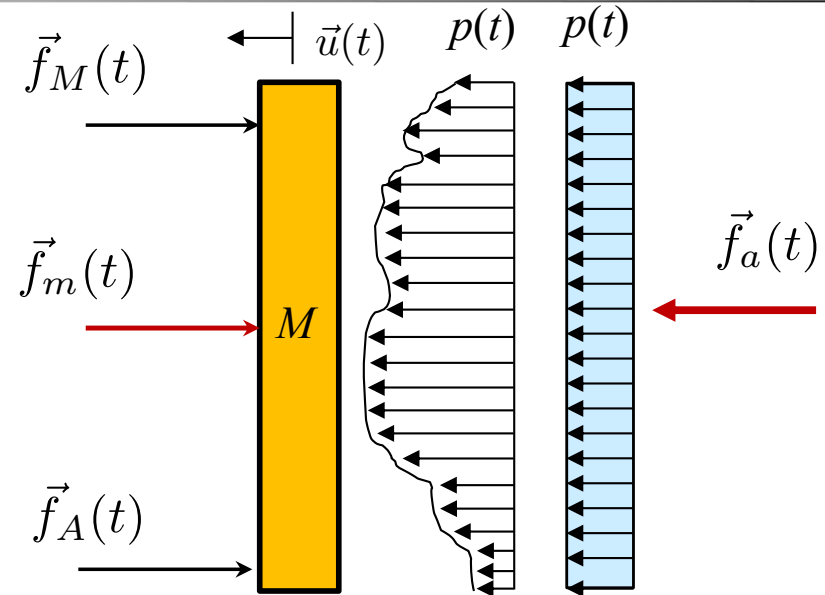
Acoplamento

$$f_m = k_e i$$

$$e_m = k_e \frac{du}{dt}$$

$$k_e = 2\pi a N \mathcal{B}$$

Mecânico



$$\sum_M \vec{f}_M = M \ddot{u}(t)$$

$$f_a(t) - ku(t) - B\dot{u} - f_m(t) = M \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + B\dot{u} + ku + f_m(t) = f_a(t)$$

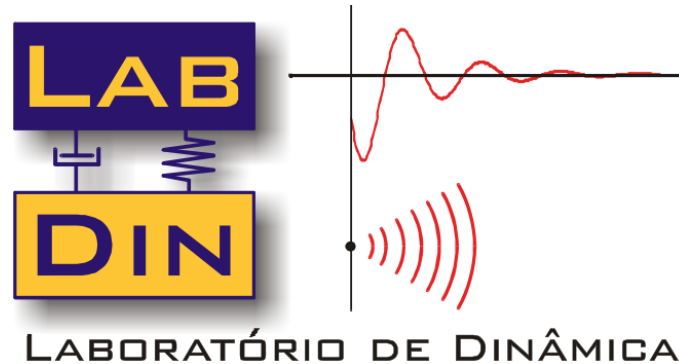
$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + B \frac{du}{dt} + ku + k_e i = f_a(t)$$

---

# FIM

## Bom Estudo !

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

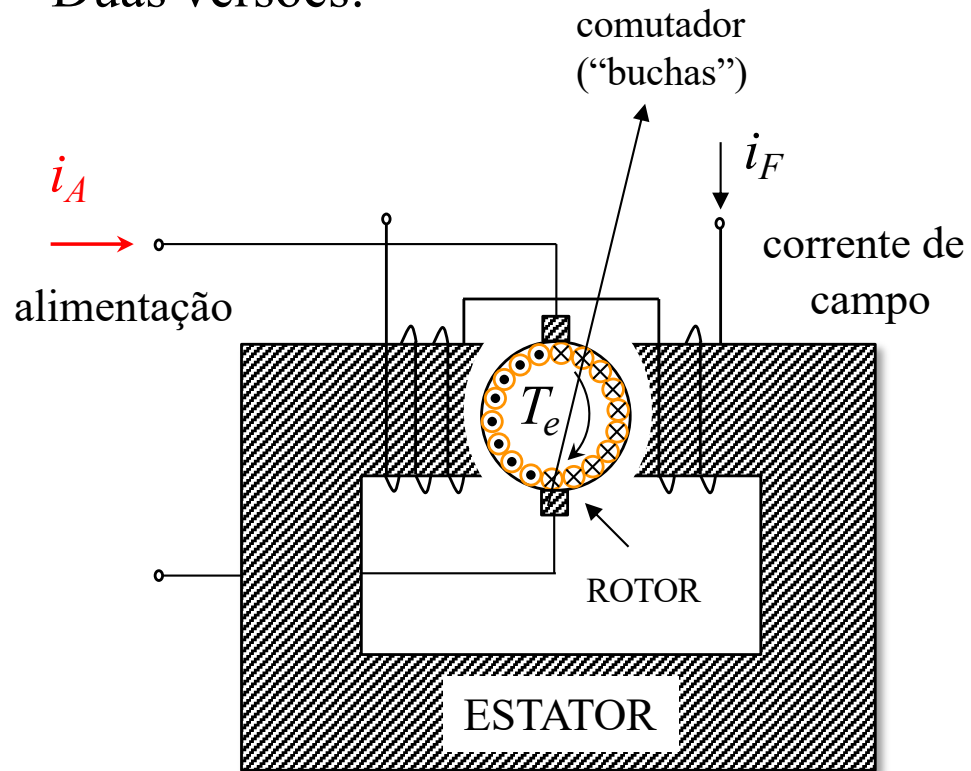


**SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I**  
**SEM 0232 – Modelos Dinâmicos**

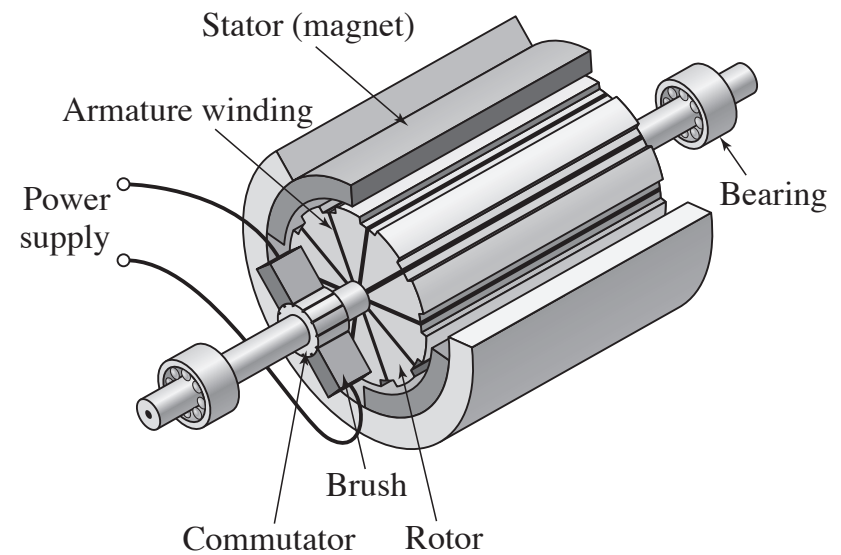
***Modelagem de Sistemas Eletromecânicos***  
***Exemplo: O Motor de Corrente Contínua***

# O Motor de Corrente Contínua (Motor DC)

Duas versões:



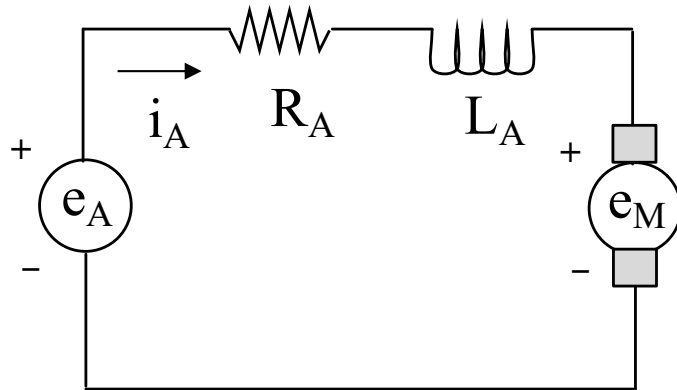
Campo e Armadura



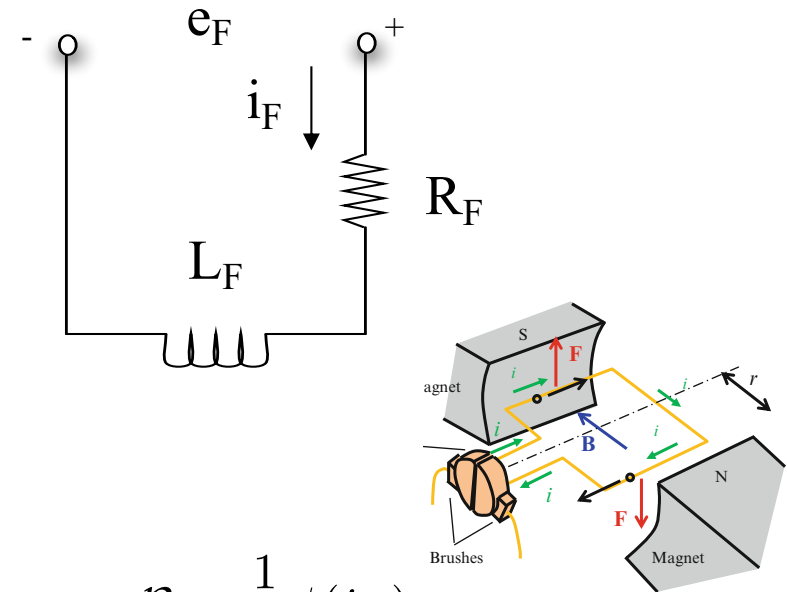
Imã Permanente

# Modelos Físicos

Rotor - Elétrico



Estator - Elétrico



Relações:

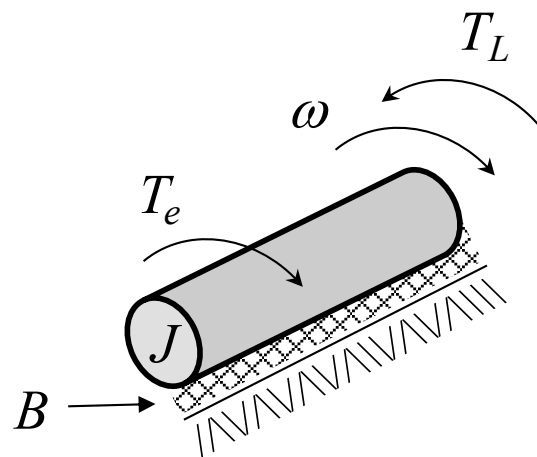
$$T_e = \mathcal{B} l a i_A \quad \mathcal{B} = \frac{1}{A} \phi(i_F)$$

$$T_e = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a i_A \quad e_m = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a \frac{d\theta}{dt}$$

se  $\phi(i_F)$  constante:

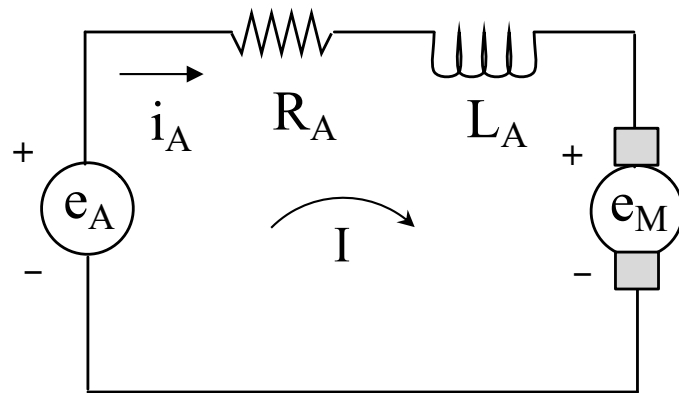
$$T_e = k_e i_A \quad e_m = k_e \frac{d\theta}{dt}$$

Rotor - Mecânico

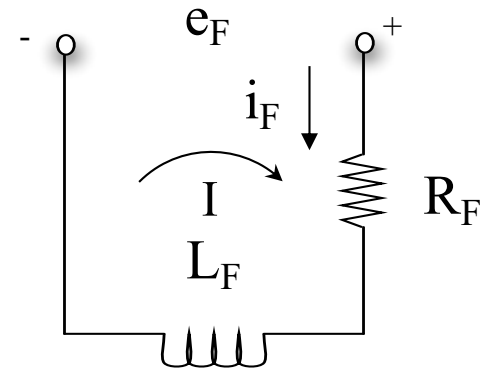


# Cont. ...

## Rotor - Elétrico

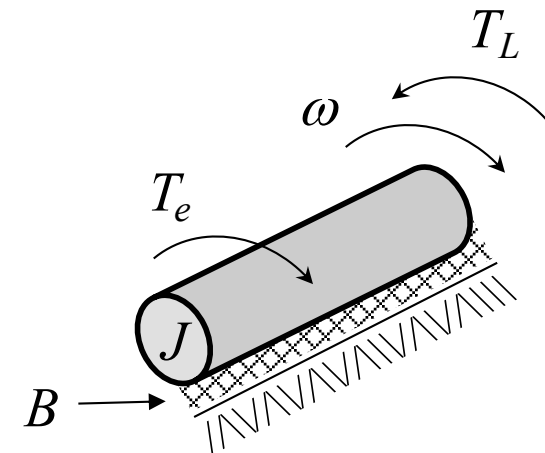


## Estator - Elétrico



$$\sum_I e_I = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -e_A + R_A i_A + L_A \frac{di_A}{dt} + e_M = 0 \\ -e_F + R_F i_F + L_F \frac{di_F}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

## Rotor - Mecânico



$$\sum T = J\ddot{\theta} \quad T_e - B\dot{\theta} - T_L = J\ddot{\theta}$$

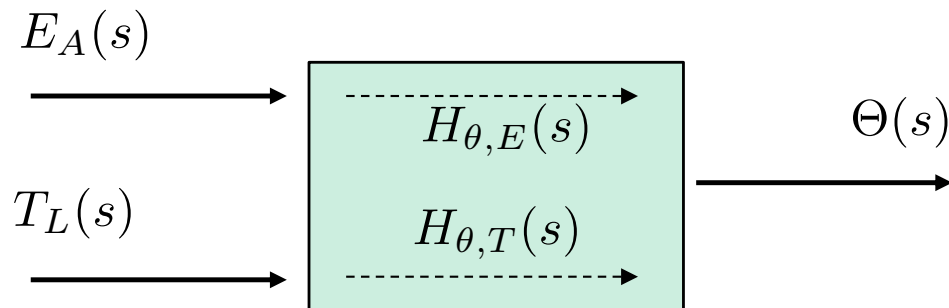
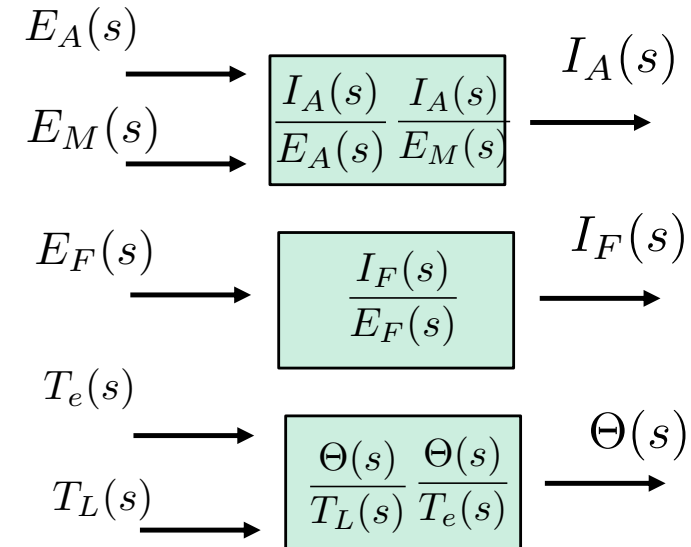
## Cont. ...

Antes de prosseguirmos com a análise, vamos reorganizar as equações e realizar uma análise sob o ponto de vista sistêmico. Então temos

$$L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A = e_A - e_M$$

$$L_F \frac{di_F}{dt} + R_F i_F = e_F$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_e - T_L$$



$$H_{\theta,T}(s) = \frac{\Theta(s)}{T_L(s)} \quad H_{\theta,E}(s) = \frac{\Theta(s)}{E_A(s)}$$

$$\Theta(s) = H_{\theta,E}(s)E_A(s) + H_{\theta,T}(s)T_L(s)$$

## Cont. ...

Vamos supor a título de exemplo que o motor gira sem carga ( $T_L = 0$ ) e que a corrente de campo magnético  $i_F$  seja constante. Como isto altera as equações ?

$$L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A = e_A - e_M \quad \Rightarrow \quad L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A + e_M = e_A$$

$$L_F \frac{di_F}{dt} + R_F i_F = e_F \quad \Rightarrow \quad e_F = R_F i_F$$

constante ! faz o papel de um ímã permanente !

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_e - T_L \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_e$$

Além disso, por  $i_F$  ser constante:  $T_e = k_e i_A$   $e_m = k_e \frac{d\theta}{dt}$

$$L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A + k_e \dot{\theta} = e_A$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - k_e i_A = 0$$



Obter a F.T.  $\frac{\Omega(s)}{E_A(s)}$

## Cont. ...

Com estas duas últimas equações é possível determinarmos a F.T. relacionando a velocidade angular do eixo do motor em relação à tensão de entrada. Para isto, aplicamos a T.L. às equações considerando C.I.s nulas. Temos

$$L_A s I_A(s) + R_A I_A(s) + k_e s \Theta(s) = E_A(s)$$

$$J s^2 \Theta(s) + B s \Theta(s) - k_e I_A(s) = 0$$

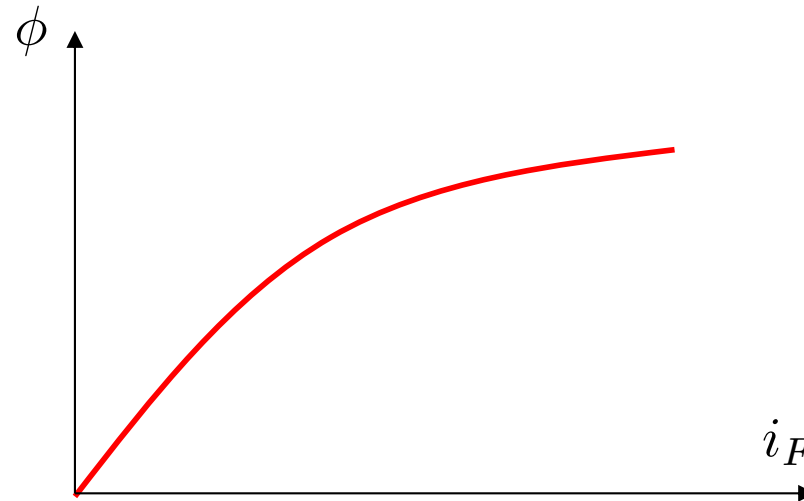
Isolando  $I_A(s)$  da segunda equação, substituindo na primeira e realizando as manipulações algébricas, chegamos a:

$$\frac{\Omega(s)}{E_A(s)} = \frac{\frac{k_e}{B R_A + k_e}}{\frac{J L_A}{B R_A + k_e} s^2 + \frac{J R_A + B L_A}{B R_A + k_e} s + 1}$$

Esta F.T. relaciona a velocidade angular do eixo à tensão de alimentação do motor quando o motor está funcionando sem carga !

## Cont. ...

Consideremos agora uma nova situação: suponha que o fluxo magnético  $\phi$  tenha uma relação não linear com a corrente de campo  $i_F$ , por exemplo, de acordo com o gráfico abaixo. Como procedermos neste caso ?



Lembremos que:  $T_e = \mathcal{B} l a i_A$        $\mathcal{B} = \frac{1}{A} \phi(i_F)$

$$T_e = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a i_A \quad T_e \neq k_e i_A \quad e_m = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a \frac{d\theta}{dt} \quad e_m \neq k_e \frac{d\theta}{dt}$$

## Cont. ...

Retornemos às equações do modelo do motor:

$$\begin{aligned} L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A &= e_A - e_M & \Rightarrow & L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A = e_A - \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a \dot{\theta} \\ J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} &= T_e - T_L & \Rightarrow & J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a i_A \end{aligned}$$

Observe que agora as equações resultantes são não lineares e os efeitos não lineares aparecem nos coeficientes da tensão induzida na armadura ( $e_M$ ) e no torque eletromecânico  $T_e$ . Se, por exemplo quisessemos simplificar o problema, poderíamos considerar que a armadura opera com tensão (e consequentemente corrente) constantes. Neste caso, teríamos que considerar somente uma equação não linear neste modelo, e, que seria:

$$J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a i_A$$

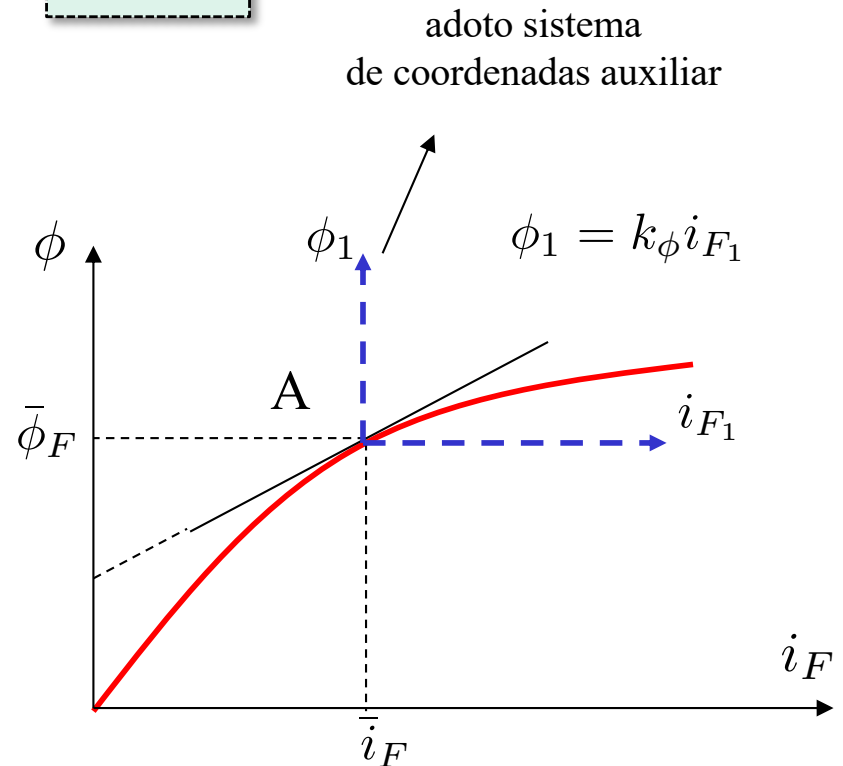
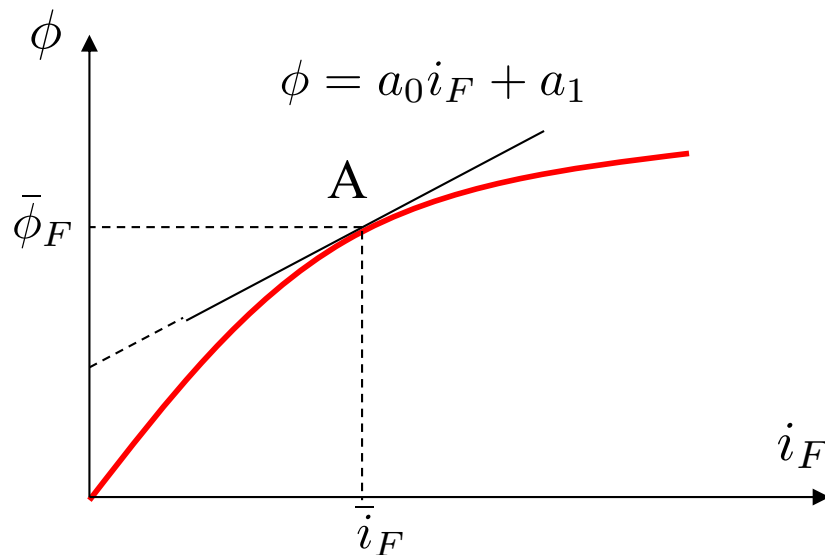
## Cont. ...

A solução da última equação pode ser feita de duas formas diferentes:

- 1 – Usando uma técnica numérica para solução de equações não lineares
- 2 – Obter um *modelo linearizado*

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \left( \frac{\phi(i_F)}{A} \right) l a i_A$$

Usando o segundo procedimento, fazemos

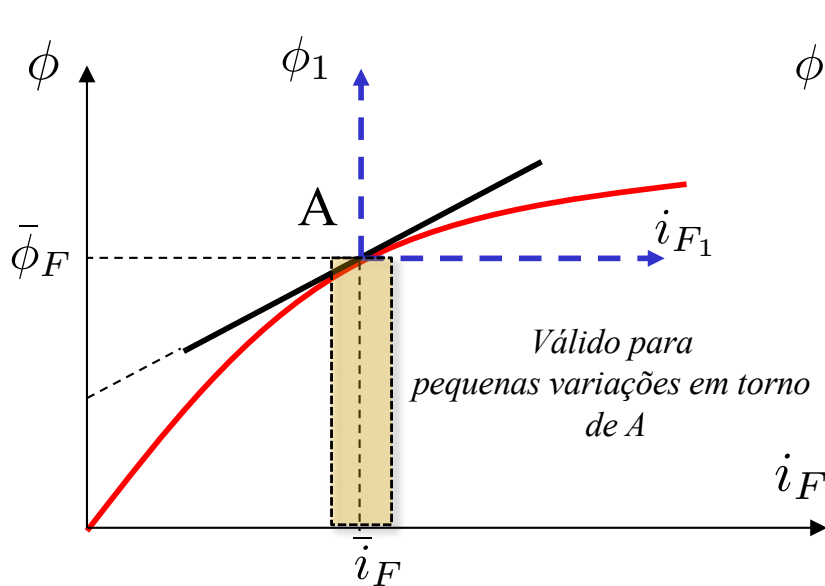


## Cont. ...

O procedimento descrito recebe o nome de linearização em torno de um ponto de operação. Neste caso, o ponto de operação é o ponto A, no qual podemos expandir a função  $f$  usando as *Séries de Taylor*, truncando no primeiro termo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\phi_1 = \phi_{10} + \left. \frac{d\phi}{di_F} \right|_{\bar{i}_F} (i_{F1} - i_{F10})$$



$$\phi_1 = \bar{k}_e i_{F1} \quad \bar{k}_e = \left. \frac{d\phi}{di_F} \right|_{\bar{i}_F}$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \bar{k}_e \bar{i}_F l a i_A$$

*Modelo Linearizado*

---

# FIM

## Bom Estudo !