Notas sobre Funções de Green – FMA 403

Prof. Luís Raul Weber Abramo

Departamento de Física Matemática – Instituto de Física – USP

Introdução geral às funções de Green

A função de Green (G. Green, c. 1828) é uma excelente técnica para resolver equações diferenciais do tipo:

$$\hat{L}\psi(x) = f(x) \ , \tag{1}$$

onde $\hat{L}$ é um operador diferencial de 2^a ordem. A idéia é que, em vez de resolver a Eq. (1), nós resolvemos a equação:

$$\hat{L}G(x,x') = \delta(x-x') \ . \tag{2}$$

Se for possível encontrar a função de Green $G(x,x')$ que satisfaz a equação acima, então a solução da Eq. (1) é:

$$\psi(x) = \int dx' \, G(x,x') \, f(x') \ . \tag{3}$$

Note que existem infinitas funções de Green que satisfazen a Eq. (2), já que sempre é possível adicionar uma função $\psi_h(x)$ a $G(x,x')$, onde $\hat{L}\psi_h = 0$, e $G(x,x') + \psi_h(x)$ será também uma função de Green que satisfaz a Eq. (2). Isso faz com que possamos escolher a função de Green apropriada de acordo com a situação, de forma que a solução obedeça a qualquer condição de contorno. Você pode ter mais (muito mais) detalhes nas notas do Prof. João Barata.

Funções de Green em eletrostática

No Eletromagnetismo, a primeira função de Green que vocês devem ter encontrado apareceu na Eletrostática. Na verdade, como vocês sabem, o potencial no ponto $\vec{x}$ devido a uma carga pontual num ponto $\vec{x}'$ é:

$$\phi_q(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \ . \tag{4}$$

Como o potencial acima é a solução da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \ , \tag{5}$$

isso significa que:

$$\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \ . \tag{6}$$

Ou seja, a função de Green para a equação de Poisson é $-1/4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|$. Na verdade, essa é a função de Green que faz com que o potencial vá a zero quando $r \to \infty$. Para outros problemas, com outras condições de contorno, você pode encontrar outras funções de Green.

Funções de Green em Eletrodinâmica

Quando há cargas e correntes em movimento, as Equações de Maxwell (no calibre de Lorentz) adquirem a forma:

$$\Box \phi(t, \vec{x}) \ = \ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(t, \vec{x}) \ , \tag{7}$$

$$\Box \vec{A}(t, \vec{x}) \ = \ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(t, \vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(t, \vec{x}) \ . \tag{8}$$

O operador $\Box$ é conhecido como D'Alembertiano.

Buscamos encontrar a função de Green que satistaz:

$$\Box G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \delta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{x}') \ , \tag{9}$$

de forma que a solução de:

$$\Box \psi(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}) \tag{10}$$

seja dada por:

$$\psi(t, \vec{x}) = \int dt' \, d^3x' G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') f(t', \vec{x}') \tag{11}$$

Vamos encontrar essa função de Green utilizando transformadas de Fourier. Ou seja:

$$\psi(t, \vec{x}) \ = \ \int \frac{d\omega \, d^3k}{(2\pi)^4} \, e^{i\omega t} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \tilde{\psi}(\omega, \vec{k}) \ . \tag{12}$$

$$\tilde{\psi}(\omega, \vec{k}) \ = \ \int dt \, d^3x \, e^{-i\omega t} \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \psi(t, \vec{x}) \ . \tag{13}$$

Fazendo a transformada de Fourier da Eq. (10) obtemos:

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\psi} = \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi} = -\frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \tilde{f} \ . \tag{14}$$

Agora, basta fazer a transformada inversa de Fourier para obter $\psi(t, \vec{x})$ em termos de $f(t', \vec{x}')$. Portanto:

$$\psi(t,\vec{x}) = \int \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4}\, e^{i\omega t}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \frac{-1}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}\tilde{f}(\omega,\vec{k}) \tag{15}$$

$$= \int \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4}\, e^{i\omega t}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \frac{-1}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}, \int dt'\, d^3x'\, e^{-i\omega t'}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} f(t',\vec{x}')\ . \tag{16}$$

$$= \int dt'\, d^3x'\, f(t',\vec{x}') \times \int \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4}\, e^{i\omega(t-t')}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\, \frac{-1}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}\ . \tag{17}$$

Comparando esta última expressão com a Eq. (11), notamos que a função de Green é dada pelos termos à direita do sinal $\times$, ou seja:

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \int \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4}\, e^{i\omega(t-t')}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\, \frac{-1}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}\ . \tag{18}$$

Para computar esta integral, é útil definir os intervalos de tempo e espaço, $\Delta t = t - t'$ e $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}'$. Assim, podemos escrever:

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d\omega\, e^{i\omega\Delta t} \int d^3k\, \frac{e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}}}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}\ . \tag{19}$$

Podemos escolher qualquer sistema de coordenadas que desejarmos na integral, em particular podemos escolher o eixo de k_z na direção de $\Delta\vec{x}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} G(t,\vec{x};t',\vec{x}') &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d\omega\, e^{i\omega\Delta t} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{e^{ik\Delta x\cos\theta}}{k^2-\omega^2/c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d\omega\, e^{i\omega\Delta t} \times (2\pi) \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2-\omega^2/c^2}\, \frac{1}{ik\Delta x} \left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Simplificando a exponencial em termos de $\mathrm{sen}(k\Delta x)$ e trocando a ordem das integrais em k e em ω obtemos:

$$G(\Delta t;\Delta x) = \frac{c^2}{4\pi^3}\frac{1}{\Delta x} \int_0^\infty dk\, k\, \mathrm{sen}(k\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\omega^2-k^2c^2}\ . \tag{21}$$

A integral em ω pode ser resolvida pelo método dos resíduos. Existem dois pólos no plano de ω complexo – um em $\omega = kc$ e outro em $\omega = -kc$. A integral acima depende, portanto, de como fechamos o contorno nesse plano complexo para incluir um, dois, ou nenhum dos dois pólos (é claro que, se a escolha fôr tal que nenhum pólo cai dentro do contorno, a integral se anula).

Algumas opções de contornos possíveis são mostradas na figura 1. Muitas outras escolhas podem ser feitas além dessas duas mostradas na figura: você poderia escolher incluir o pólo da direita mas não o da esquerda; ou você poderia escolher incluir o da esquerda e não o da direita; você poderia até escolher uma combinação linear dessas duas escolhas!

Essa liberdade na escolha do contorno, e quais resíduos portanto vão determinar a integral, é uma consequência da liberdade que temos para escolher qual função de Green queremos. Lembre-se

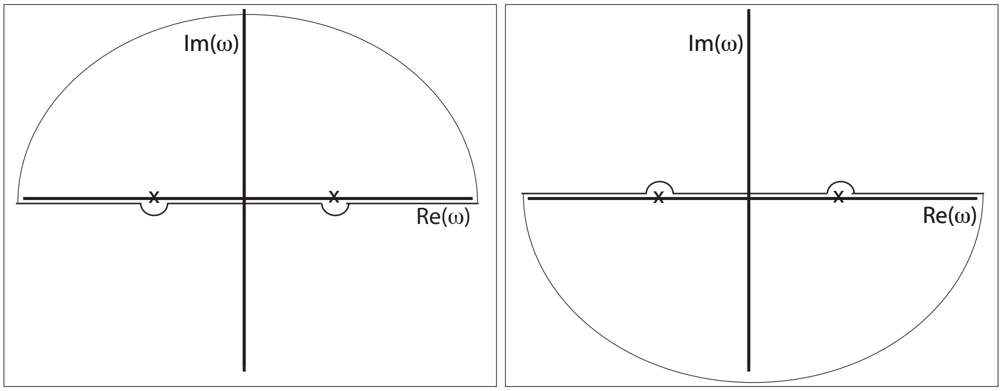

Figura 1: No painel da esquerda, se o contorno é fechado "por cima" os pólos são incluídos e a nossa integral é dada pela soma dos resíduos; se o contorno é fechado por baixo, a integral dá zero. Já no painel da direita, é o inverso que ocorre.

que existem infinitas funções de Green, e a nossa escolha deve se pautar pelas condições de contorno ou outros argumentos de natureza física.

Eu vou economizar algumas páginas de cálculos e *dizer* para vocês que a escolha apropriada para problemas que envolvem radiação de ondas eletromagnéticas é a escolha do painel esquerdo da Fig. 1. Essa escolha leva à função de Green retardada que nós discutimos em sala de aula. Note que, para que a integral possa ser fechada "por cima" é necessário que, na Eq. (21), $i\omega\Delta t \to -\infty$ quando $\mathrm{Im}(\omega) \to +\infty$. Em outras palavras: para a nossa escolha de incluir ambos os pólos, é preciso que $\Delta t > 0$. Se $\Delta t < 0$ então o contorno deve ser fechado "por baixo", nenhum dos pólos é contido no contorno e a integral dá zero. Ou seja:

$$G(\Delta t; \Delta x) = \frac{c^2}{4\pi^3} \frac{1}{\Delta x} \int_0^\infty dk\, k\, \mathrm{sen}(k\Delta x) \, \times \, \theta(\Delta t)\, 2\pi i \sum_{res\ \omega_j} (\omega - \omega_j) \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\omega^2 - k^2 c^2} \ . \tag{22}$$

Tomando ambos os resíduos, em $\omega = \pm kc$, obtemos:

$$G(\Delta t; \Delta x) \ = \ \frac{c^2\,\theta(\Delta t)}{2\pi^2 i} \frac{1}{\Delta x} \int_0^\infty dk\, k\, \mathrm{sen}(k\Delta x)\, 2 \frac{\mathrm{sen}(kc\Delta t)}{2kc} \tag{23}$$

$$= \ \frac{c\,\theta(\Delta t)}{2\pi^2} \frac{1}{\Delta x} \int_0^\infty dk \left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ikc\Delta t} - e^{-ikc\Delta t}}{2i} \right) \ . \tag{24}$$

Agora, basta usar o fato de que o integrando é uma função par de k, e que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = 2\pi\, \delta(x) \ , \tag{25}$$

e o resultado é que:

$$G(\Delta t; \Delta x) = \frac{c\,\theta(\Delta t)}{4\pi} \frac{1}{\Delta x} \left[\delta(\Delta x + c\Delta t) - \delta(\Delta x - c\Delta t)\right] \ . \tag{26}$$

Devido à função-degrau $\theta(\Delta t)$, apenas a segunda função δ pode ser diferente de zero, o que nos dá o resultado final:

$$G(\Delta t; \Delta x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta x} \delta[t' - (t - \Delta x/c)] \ . \tag{27}$$

O argumento da função δ pode ser escrito em termos do *tempo retardado* $t_R = t - \Delta x/c$. O termo $\Delta x/c$ é o tempo que um sinal que caminha à velocidade da luz leva para ir do ponto $\vec{x}'$ até o ponto $\vec{x}$. Um observador no ponto $\vec{x}$, no instante t, vê portanto um sinal que foi emitido no ponto $\vec{x}'$ no instante t_R. O que equivale dizer: um sinal emitido no instante t', no ponto $\vec{x}'$, chega no ponto $\vec{x}$ no tempo $t = t' + \Delta x/c$.

É a função de Green retardada que nos dá a noção de *causalidade*, de uma ordem na natureza (no caso, na natureza do Eletromagnetismo) que determina que "causas têm que vir antes dos efeitos". Essa propriedade causal do Eletromagnetismo foi depois extendida para toda a Física, e levou à Teoria da Relatividade Especial de Einstein, em 1905.

Para finalizar, vamos escrever a solução final para as ondas no nosso campo ψ em termos da fonte e da função de Green retardada. De (11) temos:

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= \int dt'\, d^3x'\, \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{\Delta x} \delta[t' - t_R] \times f(t', \vec{x}') \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x'\, \frac{f(t_R, \vec{x}')}{\Delta x} \ , \end{aligned}$$

Note que eu suprimi a função θ nessas últimas expressões, porque de fato ele é redundante – a condição de que $\Delta t > 0$ é sempre satisfeita no caso que estamos considerando.

Eu fiz a última integral, em dt', apenas para mostrar como o nosso resultado final se relaciona com outros resultados do Eletromagnetismo, que podem ser mais familiares. Se pusermos o potencial elétrico ϕ em vez de ψ, e $-\rho/\epsilon_0$ no lugar de f, obtemos simplesmente a solução conhecida da eletrostática. Mas note que agora a densidade de carga não é a instantânea (em t), mas aquela num instante anterior, $t_R = t - \Delta x/c$.