Campos Magnéticos em Meios Materiais

[J.D. Jackson, Classical Electrodynamics; Cap. 5]

→[A. Zangwill, Electromagnetic Field Theory; Cap. 13]

[W. Panofsky and M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism; Cap.8]

Descrição microscópica → Equações Macroscópicas

N_i densidade de moléculas de espécie i, cada uma com momento magnético $\vec{m}_i$

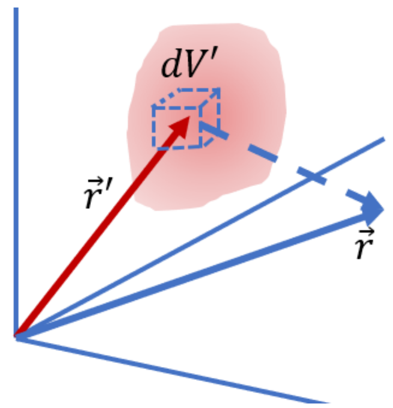
Vetor magnetização ou densidade de momento magnético: $\vec{M}(\vec{r}) = \sum_i N_i(\vec{r})\langle\vec{m}_i\rangle$

Densidade de corrente de condução devido ao fluxo de cargas livres: $\vec{j}(\vec{r})$

Incremento do potencial vetor devido às fontes em dV'

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}-\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^3}\right]dV'$$

$$\therefore\ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}-\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^3}\right]dV'$$



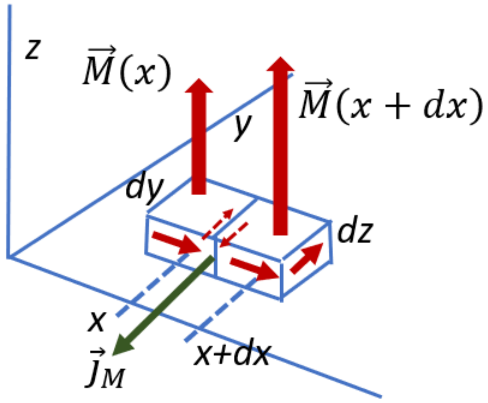
$$\int \frac{\vec{M}(\vec{r}-\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} dV' = \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' =$$

$$= \int \nabla' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] dV' - \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = -\int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$-\int \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \times d\vec{S}' = 0$$

Portanto

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'; \vec{j}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})}$$



$\vec{j}_M$: <u>*densidade de corrente efetiva de magnetização*</u>

$$m \approx dxdyI; m \approx dxdydzM \rightarrow I \approx Mdz \therefore dI \approx \frac{dM}{dx} dxdz \therefore j_M \approx \frac{dM}{dx}$$

Campo Magnético

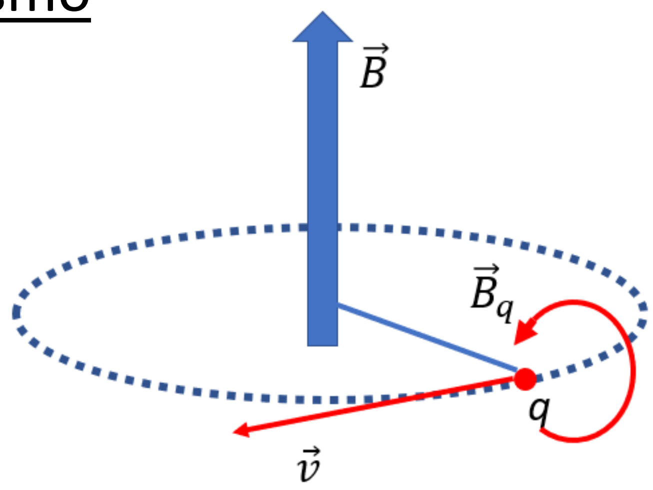
$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0[\vec{j} + \nabla \times \vec{M}] \rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

Relação constitutiva entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$:

Meios lineares: $$\vec{B} = \mu\vec{H} \rightarrow \begin{cases} \mu/\mu_0 < 1: diamagnetismo \\ \mu/\mu_0 > 1: paramagnetismo \end{cases}$$

Meios não-lineares (*ferromagnetismo*): $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$

Diamagnetismo



Paramagnetismo: devido ao alinhamento, com o campo externo, dos spins de elétrons não emparelhados no material. A maioria dos átomos com orbitais não completamente preenchidos são paramagnéticos; exceção Cu.

Condições de Contorno

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0; \;\; \hat{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = 0$$

Potencial Magnético Escalar

$$\vec{j} = 0 \;\rightarrow\; \nabla \times \vec{H} = 0 \;\therefore\; \vec{H} = -\nabla \phi_M$$

$\mu = const \;\rightarrow\; \nabla \cdot \vec{B} = 0 \;\Longrightarrow\; \nabla^2 \phi_m = 0$ (somente neste caso!)

Caso especial: materiais ferromagnéticos “duros” → $\vec{M}(\vec{r})$ especificado e $\vec{j} = 0$.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \;\rightarrow\; \mu_0 \nabla \cdot \left(\vec{M} - \nabla \phi_M\right) = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 \phi_M = -\rho_M; \; \rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\phi_M(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Se $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

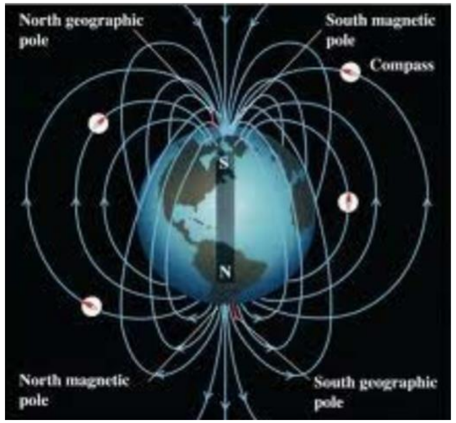
$$\Longrightarrow\; \phi_M(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi} \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot \int \vec{M}(\vec{r}') dV' = \frac{\vec{m}.\vec{r}}{r^3}$$

Esfera uniformemente magnetizada

[Solução usando potencial escalar – Jackson & problema Série V]

$$\vec{M} = M_0 \hat{e}_z$$

$$\phi_M(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = -\frac{M_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^a r'^2 dr' \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\Omega'$$



$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell,m} \frac{1}{(2\ell+1)} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi') Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$\int d\Omega' Y_{\ell m}(\theta',\varphi') = \sqrt{4\pi}\delta_{\ell 0}\delta_{m0};\ Y_{00} = \sqrt{4}\pi;\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\phi_M(r,\theta) = -M_0\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\int_0^a \frac{r'^2}{r_>}dr'$$

Fora da esfera

$$r_> = r \;\rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\int_0^a \frac{r'^2}{r_>}dr' = -\frac{a^3}{3r^2} \;\Longrightarrow \phi_M(r,\theta) = \frac{1}{3}M_0\frac{a^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{\left(\frac{4\pi a^3}{3}M_0\right)}{r^2}\cos\theta\,;\;\; r > a$$

$$\int_0^a \frac{r'^2}{r_>}dr = \int_0^r \frac{r'^2}{r}dr' + \int_r^a \frac{r'^2}{r'}dr' = -\frac{r^2}{6} + \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore\;\; \phi_M(r,\theta) = \frac{M_0}{3}z$$

Campos