Funções Marginais

Introdução

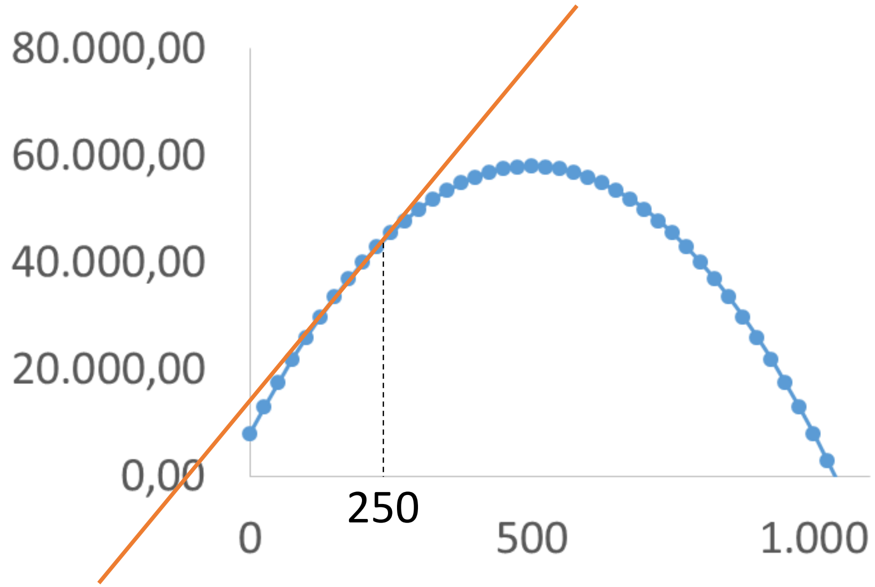
- Já fizemos exercícios onde vimos que, às vezes...
  - Mais = Menos
- Estudo das taxas de variação das quantidades econômicas
- O valor assumido pela VD é importante... Mas entender a taxa de variação em um dado ponto também é...
- Qual o custo previsto para um certo nível de produção? Mas se aumentarmos a produção, o que ocorre com os custos médio e marginal? E com o lucro?

Introdução

- Já fizemos exercícios onde vimos que, às vezes...
  - Mais = Menos
- Estudo das taxas de variação das quantidades econômicas
  - O valor assumido pela VD é importante... Mas entender a taxa de variação em um dado ponto também é...
- Qual o custo previsto para um certo nível de produção? Mas se aumentarmos a produção, o que ocorre com os custos médio e marginal? E com o lucro?

Função Custo

- Considere a seguinte função custo
  - $C(x) = 8000 + 200x - 0{,}2x^2 \ (0 \leq x \leq 400)$
  - Qual a diferença no custo total entre produzir 250 e 251 itens?
  - Agora, determine a taxa de variação da FCT em relação a x quando $x = 250$
  - Compare os resultados



Função Custo

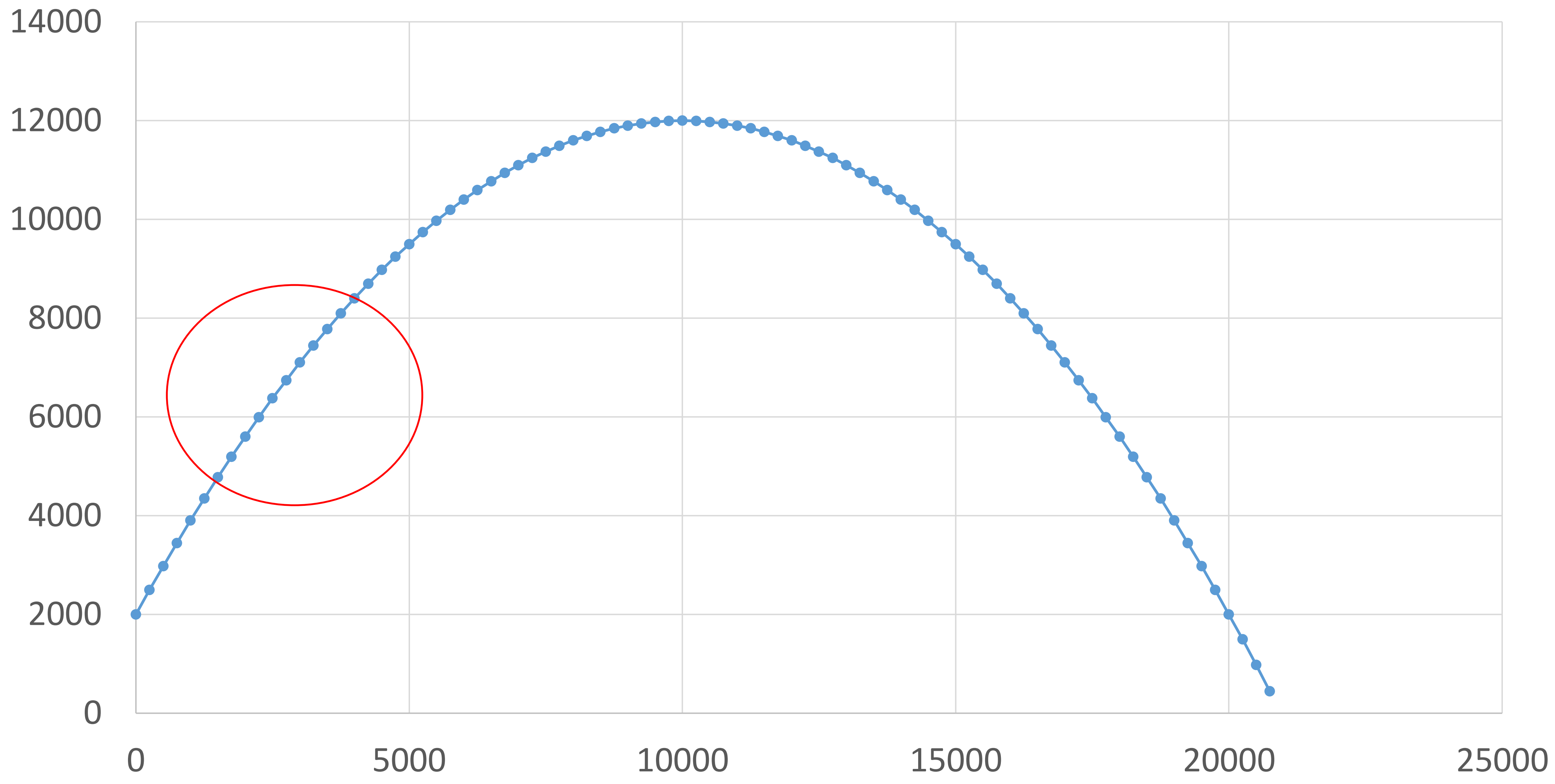
- Repare que as respostas são bastante parecidas…

$$\frac{C(251) - C(250)}{1} = \frac{C(250+1) - C(250)}{1} = \frac{C(250+h) - C(250)}{h}$$

- Lembram?
  - Primeiro calculamos a variação média (a secante entre os pontos $x = 250$ e $x = 251$), e então a variação instantânea (a tangente)
  - Os resultados se assemelham porque h é suficientemente pequeno
  - Denomina-se como custo marginal o custo real de produção de uma unidade adicional **dado um determinado nível de produção**

Função Custo

- Exemplo
  - O custo total de uma empresa é expresso por
  - $C(x) = 2000 + 2x - 0{,}0001x^2\ (0 \leq x \leq 6000)$
  - Qual o custo marginal quando $x = 1000$.... e para quando $x = 2000$?



14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
5000
10000
15000
20000
25000

Função Custo Médio

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

- A derivada dessa função indica o custo médio marginal
- Ou seja, a taxa de variação do custo médio em relação ao volume de produção
- Exemplo: em uma empresa estima-se que o custo total para a preparação de x unidades de determinado produto é de...
  - $C(x) = 100x + 200.000\ (US\$/ano)$
  - Encontre a função de custo médio
  - Encontre a função de custo médio marginal

Função Receita

$$R(x) = px$$

- Aviso: o grau de influência sobre o preço em uma empresa depende do mercado
- Em mercados competitivos nenhuma empresa é capaz de ditar preços (equilíbrio do mercado)
- Se a empresa é o único fornecedor do produto (monopólio), ela pode manipular preços controlando a oferta

Função Receita

- O preço p está relacionado com a quantidade x demandada pelo mercado

$$p = f(x)$$

$$R(x) = px = xf(x)$$

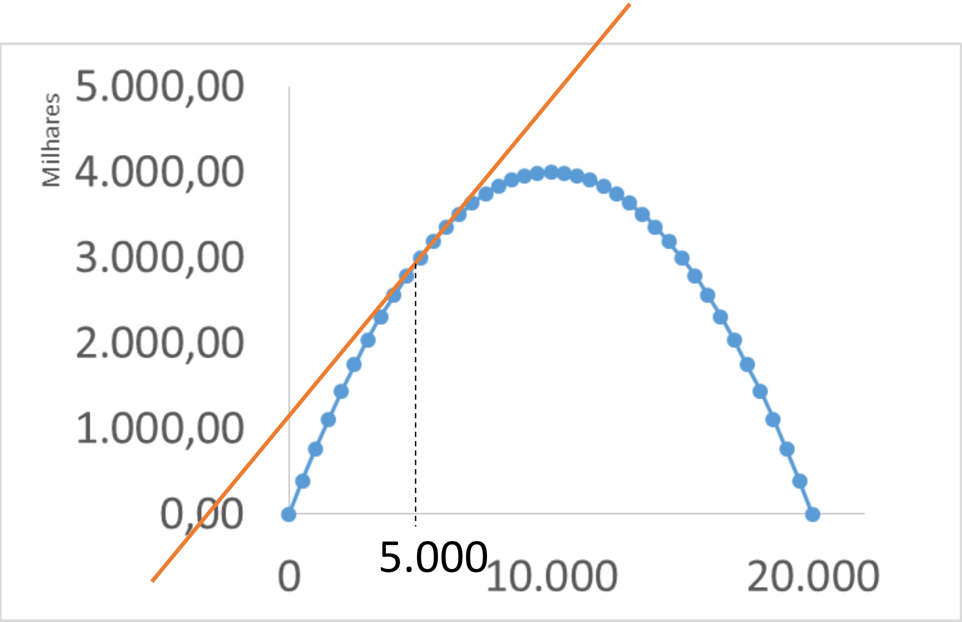
- Isso já conhecemos...
- A receita marginal representa a receita obtida com a venda de uma unidade adicional dado um certo nível de vendas

Função Receita

- Exemplo: A função demanda de determinado produto é...

$$p = -0{,}04\,x + 800\ (0 \leq x \leq 20.000)$$

  - Encontre a função de receita
  - Encontre a função de receita marginal
  - Calcular $R'(5000)$
  - Calcule a máxima receita possível
  - Interprete estes resultados



Função Lucro

$$p(x) = R(x) - C(x)$$

- $P'(x)$ mede a taxa de variação a um dado nível de vendas

- Exemplo: uma imobiliária dispõe de 100 apartamentos de dois quartos para locação. O lucro mensal (US$) realizado sobre a locação de x apartamentos é...

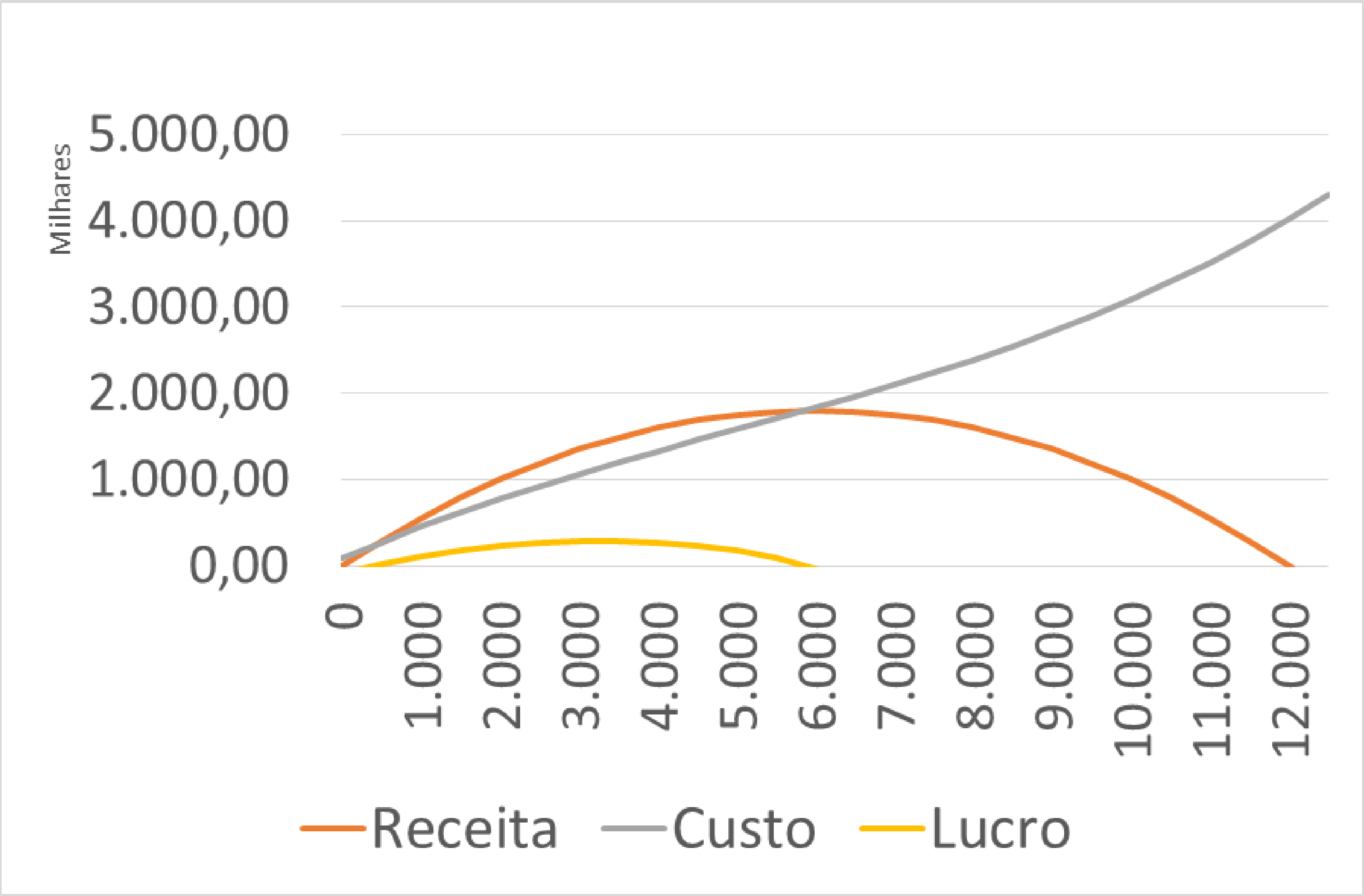
$$P(x) = -10x^2 + 1760x - 50.000$$

- Calcule o lucro marginal quando $x = 50$
- Calcule o lucro máximo alcançável

Exercício

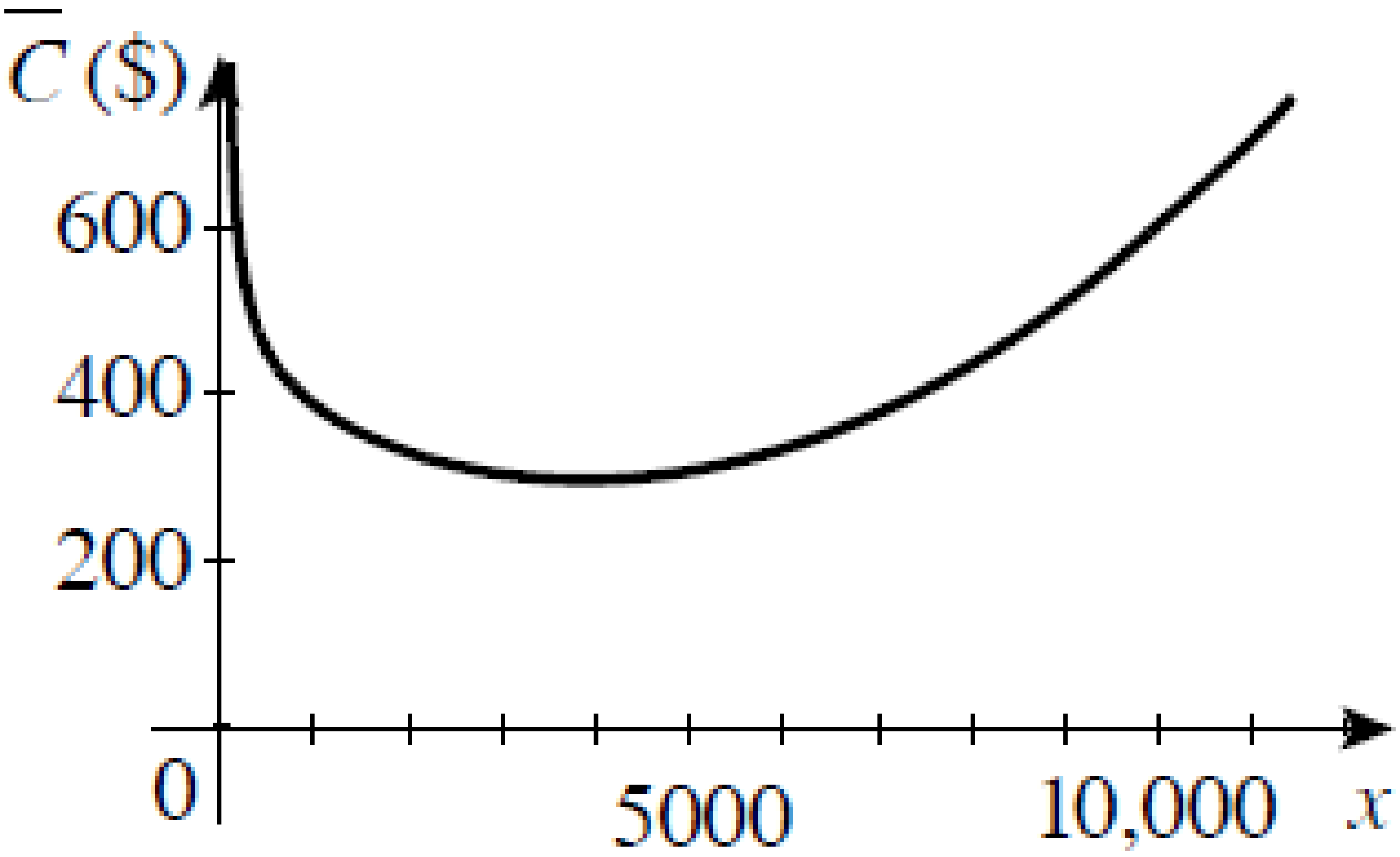
- A demanda semanal de um produto é
$$\boldsymbol{p = 600 - 0{,}05x\ (0 \leq x \leq 12.000)}$$
onde p denota o preço unitário e x denota a quantidade
- A função custo total semanal associada é dada por
$$\boldsymbol{C(x) = 0{,}000002x^3 - 0{,}03x^2 + 400x + 80.000}$$
onde $C(x)$ representa o custo total na produção x unidades
- Determine a função lucro P
- Encontre C', R' e P'
- Calcular $C'(2000)$, $R'(2000)$ e $P'(2000)$ e interprete os resultados
- Esboce os gráficos das funções C, R, e P e interprete-os

Exercício

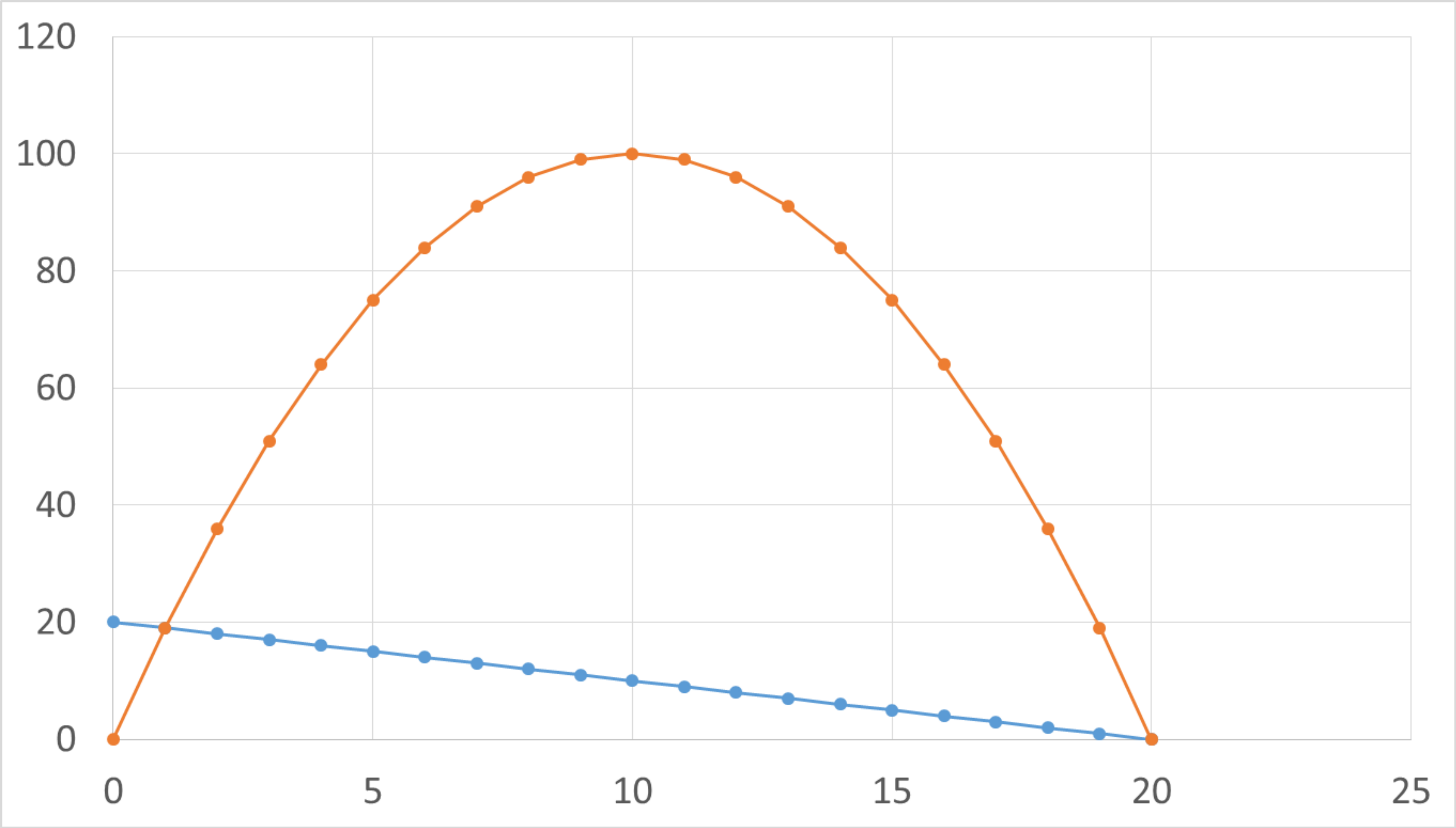

Milhares
5.000,00
4.000,00
3.000,00
2.000,00
1.000,00
0,00
0
1.000
2.000
3.000
4.000
5.000
6.000
7.000
8.000
9.000
10.000
11.000
12.000
Receita
Custo
Lucro

Exercício

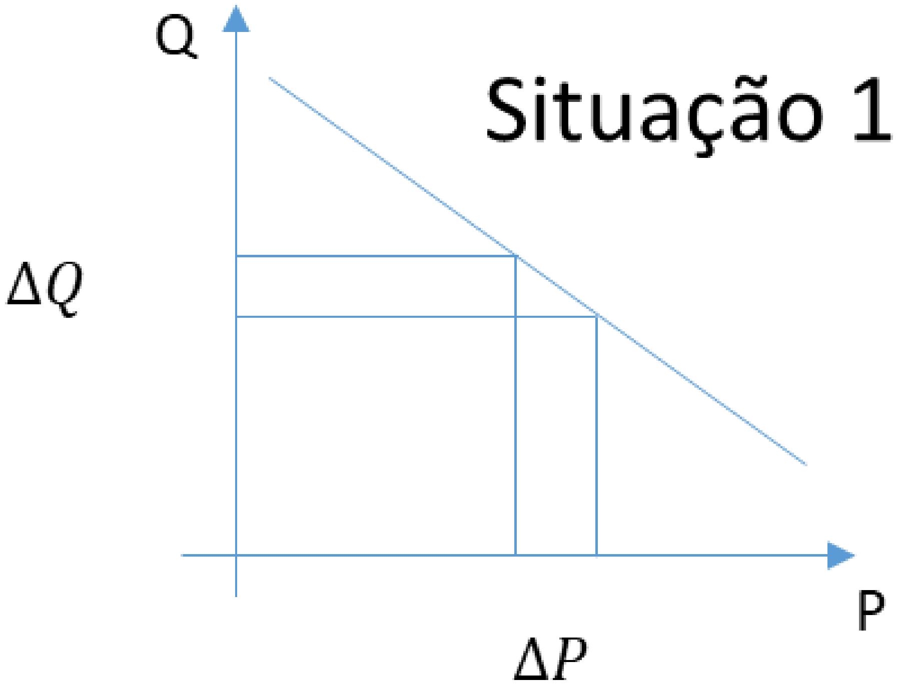
- Volte aos dados do exercício anterior...
- Qual a função custo médio?
- E a de custo médio marginal?
- Calcule $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ para 5.000 e 10.000 unidades respectivamente
- Esboce o gráfico

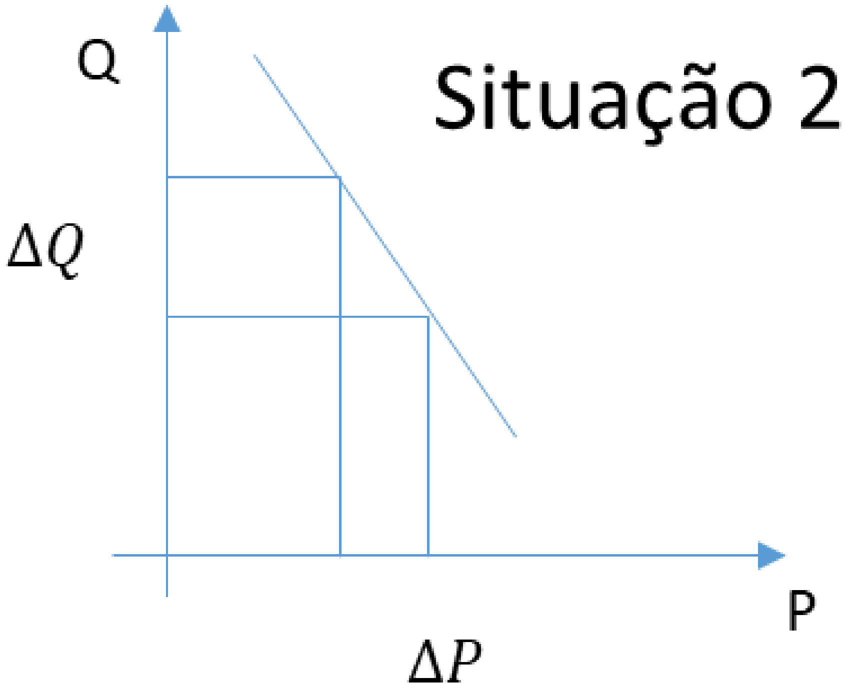

$\overline{C}$ ($)
600
400
200
0
5000
10,000
x

Quantidade	Preço	Receita
0	20	0
1	19	19
2	18	36
3	17	51
4	16	64
5	15	75
6	14	84
7	13	91
8	12	96
9	11	99
10	10	100
11	9	99
12	8	96
13	7	91
14	6	84
15	5	75
16	4	64
17	3	51
18	2	36
19	1	19
20	0	0



Efeito do Preço na Demanda





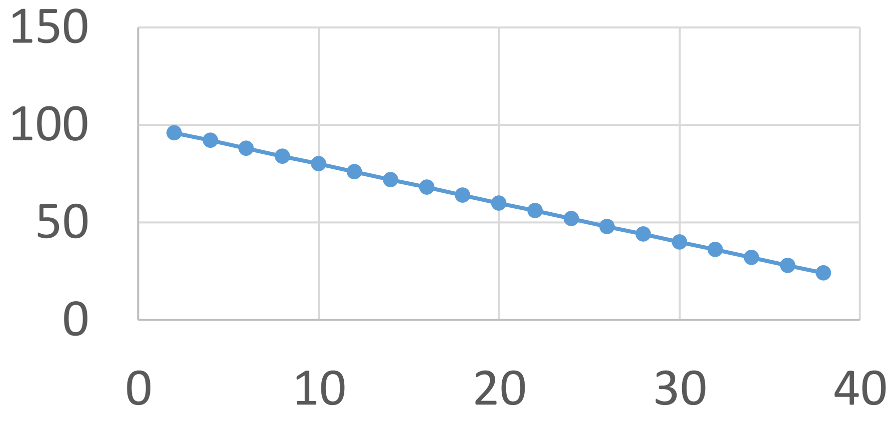
Elasticidade da Demanda

- Variação **percentual** na quantidade demandada ante a uma variação **percentual** no preço
- Vamos supor que a demanda por um certo produto é dado por

$$p(q) = -\frac{1}{2}q + 50$$

- Problema: queremos saber como o preço influencia a demanda… $p(q)$ expressa o preço em função da quantidade!!!!!

Elasticidade da Demanda



- Invertendo... Temos:

$$q(p) = 100 - 2p$$

- Para $p = 10$, teríamos $q(10) = 100 - 2(10) = 80$
- Para $p = 20$, teríamos $q(20) = 100 - 2(20) = 60$

Elasticidade da Demanda

- Podemos agora definir elasticidade de demanda

$$E(p) = \frac{\Delta\%\ q}{\Delta\%\ p} = \frac{\dfrac{q_1 - q_0}{q_0}}{\dfrac{p_1 - p_0}{p_0}} = \frac{\dfrac{\Delta q}{q_0}}{\dfrac{\Delta p}{p_0}} = \frac{\Delta q}{q_0} \times \frac{p_0}{\Delta p} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \frac{p_0}{q_0}$$

Elasticidade da Demanda

- Calculando...

$$E(p) =$$

- Importante: a elasticidade não é constante
  - Calculem para quando o preço sobe de \$20 para \$30
- Funções de primeiro grau...

Elasticidade da Demanda

- Vejamos agora como proceder para qualquer função

$$E(p) = \frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q} = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \frac{q'(p)p}{q(p)}$$

$$q(p) = 100 - 2p$$

$$q'(p) = -2$$

Elasticidade da Demanda

- Vejamos agora como proceder para variações infinitesimais

$$E(p) = \frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q} \quad = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} \quad \Rightarrow -\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}$$

$$E(10) = -\frac{10 \times (-2)}{100 - 2(10)} = \frac{20}{80} = 1/4$$

Elasticidade da Demanda

- Exemplo
  - $f(x) = p = -0{,}02x + 400$ $(0 \leq x \leq 20.000)$ descreve a relação entre preço e quantidade demandada
  - Calcule a elasticidade de demanda
  - Calcule $E(100)$ e $E(300)$
  - Interprete os resultados
  - Tá... Mas e daí? Não devemos aumenta o preço nunca?

Elasticidade da Demanda e a Receita

- Usa-se a seguinte terminologia para descrever a demanda em termos de elasticidade:
  - $E(p) > 1$ – demanda elástica
  - $E(p) < 1$ – demanda inelástica
  - $E(p) = 1$ – demanda unitária

- Por exemplo, no exercício anterior, com $p = 100$ tínhamos demanda inelástica e com $p = 300$ tínhamos demanda elástica

- Como a elasticidade afeta a receita?

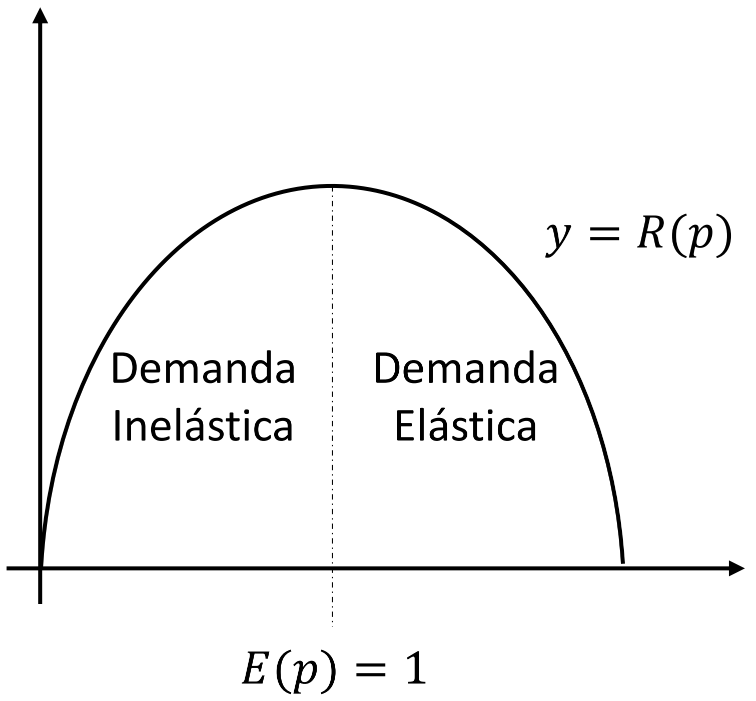
Elasticidade da Demanda

- $R(p) = pq \; = pf(p)$
- $R'(p) = [(1) \times f(p)] + [p \times f'\,(p)]$
- $R'(p) = f(p)\left[1 + \frac{pf'(p)}{f(p)}\right]$
- $R'(p) = f(p)[1 - E(p)]$

- Volte ao exercício anterior... O que ocorre quando o preço está em \$100? E em 300?

Elasticidade da Demanda

- E o que isso significa?
  - $E(p) > 1$ – demanda elástica → aumentar o preço reduz a receita
  - $E(p) < 1$ – demanda inelástica→ aumentar o preço aumenta a receita
  - $E(p) = 1$ – demanda unitária→ variar o preço não altera a receita



Elasticidade da Demanda

- Exemplo
  - $x = \frac{1}{5}(225 - p^2) \qquad\qquad (0 \leq p \leq 15)$
  - Com x em centenas de unidades e p em US$
  - Como varia a demanda quando o preço é de \$8,00 e \$10,00?
  - Quando a demanda é unitária?
  - O que ocorre com a receita se o preço de \$10,00 for diminuído ligeiramente?
  - O que ocorre com a receita se o preço de \$8,00 for aumentado ligeiramente?

Exercício

- Equação de demanda

$$x = 10\sqrt{\frac{50-p}{p}} \qquad (0 < p \leq 50)$$

- Onde x (em milhares de unidade) é a quantidade demandada e p é o preço
- Verifique as faixas de preços onde a demanda é elástica, inelástica e unitária

Exercício

- Considere a seguinte função demanda:

$$p = \sqrt{9 - 0{,}02x} \qquad (0 < p \leq 450)$$

- Onde x (em milhares de unidade) é a quantidade demandada e p é o preço
- Verifique as faixas de preços onde a demanda é elástica, inelástica e unitária