Lista 4

Nícolas André da Costa Morazotti

20 de Maio de 2020

Questão 1

Uma carga q se encontra num meio com constante dielétrica κ. Adota-se um sistema de coordenadas com origem na posição da carga. Encontre o campo elétrico $\mathbf{E}$ numa posição $\mathbf{r}$, qualquer. *Sugestão: a partir da relação $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho/\varepsilon_0$, mostre que o vetor deslocamento obedece a uma lei de Gauss. Essa lei permite encontrar o vetor deslocamento na posição* $\mathbf{r}$. *A partir de* $\mathbf{D}$, *encontre o campo elétrico.*

Seguindo a sugestão, considere a equação dada. Veja que ela se parece com a lei de Gauss para uma carga isolada no vácuo: $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Assim, podemos aplicar a forma integral da lei de Gauss para o campo $\mathbf{D}$, tendo

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla\cdot\mathbf{D}dV &= \int_{A(V)} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} && (1)\\
&= D\cdot 4\pi r^2 && (2)\\
D4\pi r^2 &= \frac{q}{\varepsilon_0} && (3)\\
\kappa E &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} && (4)\\
\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. && (5)
\end{aligned}$$

Em geral, escreve-se $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$, tornando a equação 5

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{6}$$

Questão 2

Já vimos que a susceptibilidade de um dielétrico e sua constante dielétrica são relacionados pela equação $\chi = \kappa - 1$. Nas condições da questão 1, calcule o vetor de polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, calcule a sua divergência $\nabla\cdot\mathbf{P}$ e discuta o resultado.

Podemos reescrever o vetor de polarização em função do campo elétrico $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$. Substituindo tal relação na equação 5,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{q\chi\varepsilon_0}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} && (7)\\
&= \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. && (8)
\end{aligned}$$

No caso do divergente, vamos considerar primeiramente qualquer posição que **não a posição da carga** q. Assim,

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{q}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_j \hat{e}_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_i\frac{\hat{e}_i x_i}{(\sum_k x_k^2)^{3/2}}\right] \tag{10}$$

$$= \sum_{i,j}\delta_{i,j}\frac{1}{(\sum_k x_k^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial_j}x_i + x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_k x_k^2\right)^{-3/2} \tag{11}$$

$$= \sum_i\frac{1}{r^3} + x_i\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\sum_k x_k^2\right)^{-5/2}\sum_k\delta_{k,i}2x_k \tag{12}$$

$$= \frac{3}{r^3} - 3\frac{\sum_i x_i^2}{r^5} \tag{13}$$

$$= \frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5} \tag{14}$$

$$= 0. \tag{15}$$

Computacionalmente,

```
from sympy import *
from sympy.physics.vector import ReferenceFrame, divergence
from sympy.abc import kappa, q
import numpy as np

X = ReferenceFrame("X")
r = np.sum([X[i]*versor for i, versor in enumerate(X)])

P = ((kappa-1)/kappa)*(q/(4*pi))*(r/r.magnitude()**3)
P
```

$$\frac{X_x q\,(\kappa-1)}{4\pi\kappa\left(X_x^2+X_y^2+X_z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}} + \frac{X_y q\,(\kappa-1)}{4\pi\kappa\left(X_x^2+X_y^2+X_z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \frac{X_z q\,(\kappa-1)}{4\pi\kappa\left(X_x^2+X_y^2+X_z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}$$

```
result = r"\nabla\cdot\mathbf{P} = "+str(simplify(divergence(P,X)))
result
```

```
\nabla\cdot\mathbf{P} =0
```

Contudo, considere as equações $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ e $\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E}$. Assim, $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0\chi}{\kappa}\mathbf{D} \to \nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0\chi}{\kappa}\nabla\cdot\mathbf{D}$. Portanto, podemos escrever $\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\rho$ que não é 0 em todo ponto, apenas em posições que não a posição da carga. Na posição da carga, tanto $\mathbf{P}$ quanto seu divergente vão a ∞. Ou seja,

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}\neq\mathbf{0} \\ \infty, & \mathbf{r}=\mathbf{0}\end{cases} \tag{16}$$

Questão 3

Duas cargas, q e $-q$, estão separadas por uma distância d. No vácuo, a força de atração entre elas tem intensidade F. Para quanto se reduz a força de atração quando as mesmas cargas estão separadas pela mesma distância no silício? *Sugestão: calcule o vetor deslocamento devido à carga positiva no ponto onde está a carga negativa, encontre a partir dele o campo elétrico que age sobre a carga negativa e calcule a força.*

A força que a carga faz sobre a outra carga é $\mathbf{F}_{q,-q} = -q\mathbf{E}_q$. Num dielétrico, o campo elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\kappa$ é responsável pela força entre as cargas. Portanto

$$\mathbf{F}' = -q\mathbf{E} \tag{17}$$

$$= -\frac{q}{\kappa}\mathbf{D}, \tag{18}$$

aqui, o campo $\mathbf{D}$ é como se fosse o campo elétrico no vácuo; assim,

$$\mathbf{F}' = -\frac{q}{\kappa}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}}{d^3} \tag{19}$$

$$= \frac{\mathbf{F}}{\kappa} \tag{20}$$

$$F' = \frac{F}{\kappa}, \tag{21}$$

onde κ é a constante dielétrica do silício. No caso, $\kappa = 12$, o que faz com que $F' = F/12$.

Questão 4

Uma esfera de raio R é constituída por um dielétrico com constante κ. Carrega-se essa esfera com densidade de carga ρ. Encontre o vetor deslocamento e o campo elétrico a uma distância r do centro da esfera. Considere os casos $r < R$ e $r > R$. *Sugestão: como na questão 1, empregue a lei de Gauss para o vetor deslocamento.*

Para distâncias internas à esfera, encontramos o campo $\mathbf{D}$ utilizando a lei de Gauss para ele: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho/\varepsilon_0$. Integrando no volume (e assumindo a densidade de carga ρ uniforme), temos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \tag{22}$$

$$\int_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{23}$$

$$D 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \tag{24}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}. \tag{25}$$

O campo elétrico é calculado como $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\kappa$.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\kappa\varepsilon_0}\mathbf{r}. \tag{26}$$

Fazendo a mesma coisa para distâncias $r > R$,

$$\int_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi\rho R^3}{3\varepsilon_0} \tag{27}$$

$$D4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3\varepsilon_0} \tag{28}$$

$$D = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{29}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{30}$$

Contudo, fora do dielétrico, $\kappa \equiv 1$; assim, $\mathbf{E} = \mathbf{D}$.

Questão 5

Para a esfera da questão 4, encontre $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ para $r < R$, calcule sua divergência e discuta o resultado.

Como $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E} = (\kappa - 1)\varepsilon_0\mathbf{D}/\kappa$, podemos calcular o divergente como

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{(\kappa - 1)\varepsilon_0}{\kappa}\nabla \cdot \mathbf{D} \tag{31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\rho. \tag{32}$$

Se tivéssemos calculado sem substituir a lei de Gauss para o campo $\mathbf{D}$, teríamos a mesma coisa:

$$\mathbf{P} = (\kappa - 1)\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{33}$$

$$= \frac{(\kappa - 1)\varepsilon_0\rho}{3\kappa\varepsilon_0}\mathbf{r} \tag{34}$$

$$= \frac{\kappa - 1}{3\kappa}\rho\mathbf{r} \tag{35}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{3\kappa}\rho\nabla \cdot \mathbf{r} \tag{36}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \sum_{i,j} \hat{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_j x_j \tag{37}$$

$$= \sum_{i,j} \delta_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}x_j \tag{38}$$

$$= \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \tag{39}$$

$$= \sum_i 1 \tag{40}$$

$$= 3 \tag{41}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\rho. \tag{42}$$

Questão 6

Um cilindro de material dielétrico com susceptibilidade dielétrica χ tem raio a e comprimento $L \gg a$. O cilindro está uniformemente carregado com densidade volumétrica de carga ρ. Trabalhe com a aproximação $L \to \infty$ e calcule o campo elétrico a uma distância $\rho < a$ do eixo do cilindro.

Para não haver confusão, a distância do eixo do cilindro ao ponto será denominada de d. Se $\chi = \kappa - 1$, $\kappa = \chi + 1$. Utilizando a lei de Gauss para o campo de deslocamento,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{43}$$

$$\int_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi d^2 L \rho}{\varepsilon_0} \tag{44}$$

$$D 2\pi d L = \frac{\pi d^2 L \rho}{\varepsilon_0} \tag{45}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{d} \tag{46}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2(\chi + 1)\varepsilon_0}\mathbf{d}; \tag{47}$$

Questão 7

Um capacitor esférico é constituído por duas cascas esféricas concêntricas, como mostra a Fig. 1. O dielétrico tem constante dielétrica κ. Calcule o campo elétrico entre as placas e, a partir dele, determine a capacitância.

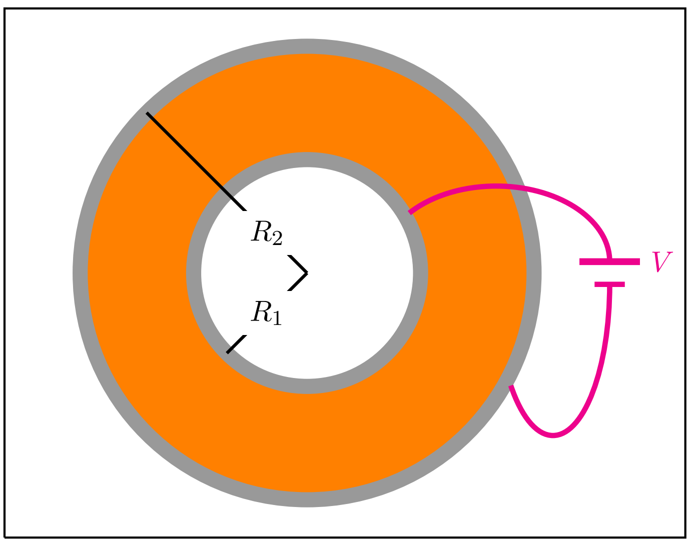

Figura 1: Capacitor esférico.

Caso o capacitor não tivesse um dielétrico ali dentro, teria uma capacitância C de tal forma que sua carga fosse $Q = CV$. Deste jeito, o campo elétrico seria dado por

$$\mathbf{E} = \frac{CV}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{48}$$

com $C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$. Com o dielétrico, o campo cairia em $1/\kappa$, o que implicaria que o potencial também cairia em $1/\kappa$. Contudo, como estamos mantendo o potencial constante, igual a V, isso implica que a carga deve aumentar em κ para que o potencial seja o mesmo. Quando a carga CV

aumenta de κ, a capacitância aumenta de κ. Assim,

$$\tilde{C} = \kappa C \tag{49}$$

$$= 4\pi\kappa\varepsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R - 1}\right). \tag{50}$$

Questão 8

O capacitor plano da Fig. 2 está preenchido até a metade, como indicado, por um dielétrico com constante κ. Calcule os vetores de deslocamento nas regiões preenchida e vazia para encontrar as cargas depositadas nas metades esquerdas e direitas das placas. A partir das cargas, determine a capacitância.

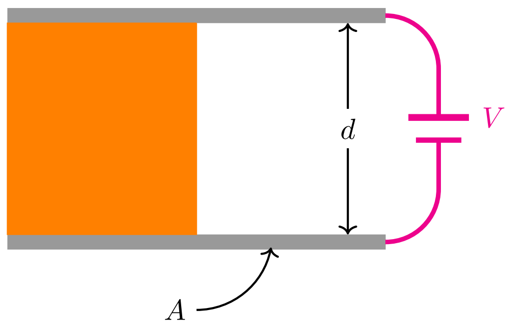

Figura 2: Capacitor plano semipreenchido horizontalmente.

Como estamos mantendo as placas à mesma diferença de potencial, as cargas sobre o dielétrico e sobre o vácuo devem ser distintas. Seja então σ a carga sobre a metade sobre o vácuo e σ_d a metade sobre o dielétrico. Na metade sobre o vácuo, por não ter cargas de polarização, o campo D é igual ao campo E. Assim,

$$D_v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{51}$$

Dentro do dielétrico, o campo de deslocamento é

$$D_d = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}. \tag{52}$$

Contudo, uma vez que as placas estão sob a mesma diferença de potencial, a carga σ_d deve ser tal que o campo $\mathbf{E}$ interno ao dielétrico não é mudado. Desta forma, $\sigma_d = \kappa\sigma$. A carga do capacitor, então, se torna

$$Q = \sigma\frac{A}{2} + \kappa\sigma\frac{A}{2} \tag{53}$$

$$= \frac{A\sigma}{2}(1 + \kappa). \tag{54}$$

A capacitância do capacitor pode ser calculada como $C = Q/V$. Assim,

$$C = \frac{A}{2}\frac{\sigma}{V}(1 + \kappa). \tag{55}$$

Veja que a capacitância é equivalente a considerarmos dois capacitores de área $A/2$ e distância d em paralelo, mas um deles contendo um dielétrico κ internamente a ele.

Questão 9

O capacitor plano da Fig. 3 está preenchido até a metade, como indicado, por um dielétrico com constante κ. Calcule os vetores de deslocamento nas regiões preenchida e vazia para encontrar as cargas depositadas nas placas. A partir das cargas, determine a capacitância.

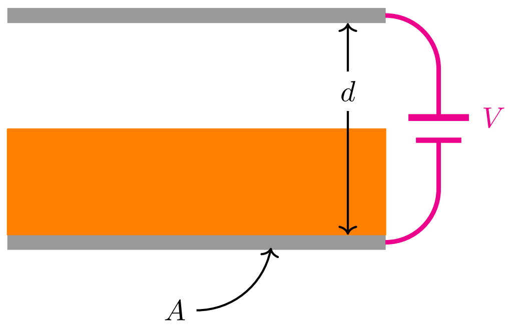

Figura 3: Capacitor plano semipreenchido verticalmente.

Veja que todos os efeitos devem contribuir para uma carga efetiva σ sobre as placas. No vácuo, o campo elétrico é dado por $E = \sigma/\varepsilon_0$, e na parte do dielétrico, $D = \sigma/\varepsilon_0 \implies E = \sigma/\kappa\varepsilon_0$. O potencial V cai de maneiras distintas dentro do capacitor: no vácuo, $V = \sigma z/\varepsilon_0$ e no dielétrico, $V = \sigma z/\kappa\varepsilon_0$. A queda de potencial completa então é dada por

$$V = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma d}{2\kappa\varepsilon_0} \tag{56}$$

$$= \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right). \tag{57}$$

Como $V = Q/C$ e $\sigma = Q/A$, segue que a capacitância é dada por

$$C = \sigma A \frac{2\varepsilon_0}{\sigma d}\frac{\kappa}{\kappa + 1} \tag{58}$$

$$= \frac{2A\varepsilon_0}{d}\left(\frac{1}{1 + 1/\kappa}\right). \tag{59}$$

Como a capacitância de um capacitor de área A e distância $d/2$ é dado por $A\varepsilon_0/(d/2)$, o que temos aí é uma associação em série de dois capacitores de distância $d/2$, um deles com vácuo e outro com um dielétrico κ.

Questão 10

Uma partícula de carga q move-se com velocidade $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y}$ num campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Encontre e resolve o sistema de equações diferenciais obedecido pelas componentes v_x e v_y, para determinar $v_x(t)$ e $v_y(t)$. É dado que $v_x(0) = -v_y(0) = v_0$. *Sugestão: encontre a força de Lorentz sobre a partícula e aplique a segunda lei de Newton para encontrar as equações diferenciais que $v_x(t)$ e $v_y(t)$ obedecem. Você encontrará uma equação para dv_x/dt e outra para dv_y/dt. Para resolver esse sistema, derive a primeira equação em relação ao tempo e substitua nela a expressão para dv_y/dt que constitui a outra equação. Resultará uma equação diferencial de segunda ordem equivalente à equação do oscilador harmônico, que você deve saber resolver.*

Seguindo a força de Lorentz, sabemos que

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{60}$$
$$= q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y}) \times B\hat{z} \tag{61}$$
$$= qB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x}) \tag{62}$$
$$m(\dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y}) = qB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x}). \tag{63}$$

Para cada uma das direções, o sistema de equações diferenciais se torna

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m}v_y \tag{64}$$
$$\dot{v}_y = -\frac{qB}{m}v_x. \tag{65}$$

Se derivarmos a equação 64 no tempo, o lado direito terá $\dot{v}_y$, tal que podemos substituir a equação 65.

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y \tag{66}$$
$$= -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x. \tag{67}$$

Utilizando o *ansatz* $v_x = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$, $\dot{v}_x = -r\alpha\sin(rt) + r\beta\cos(rt)$ e $\ddot{v}_x = -r^2\alpha\cos(rt) - r^2\beta\sin(rt) = -r^2v_x$. Substituindo na equação 67,

$$-r^2v_x = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x \tag{68}$$
$$\implies v_x\left(r^2 - \frac{q^2B^2}{m^2}\right) = 0. \tag{69}$$

Como essa expressão deve valer para **qualquer instante de tempo**, segue que podemos cancelar o v_x, que não vale 0 para qualquer t. Assim,

$$r = \frac{qB}{m}. \tag{70}$$

Podemos cancelar o possível sinal pois colocaremos em funções seno e cosseno, que têm paridade definida e assim mudaria apenas a constante, ainda por ser determinada. Podemos escrever a solução como

$$v_x(t) = \alpha\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \beta\cos\left(\frac{qB}{m}t\right). \tag{71}$$

A condição inicial $v_x(0) = v_0$ nos dá que $v_0 = \beta$. Assim,

$$v_x(t) = \alpha\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_0\cos\left(\frac{qB}{m}t\right). \tag{72}$$

Para encontrar v_y, podemos derivar a equação 72 e substituí-la na equação 64.

$$\dot{v}_x(t) = \frac{qB}{m}\left[\alpha\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_0\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \tag{73}$$
$$= \frac{qB}{m}v_y \tag{74}$$
$$\implies v_y = \alpha\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_0\sin\left(\frac{qB}{m}t\right). \tag{75}$$

Colocando a condição inicial $v_y(0) = -v_0$ na equação 75, chegamos a $-v_0 = \alpha$. Assim,

$$v_x(t) = -v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \tag{76}$$

$$v_y(t) = -v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right). \tag{77}$$

Para fazer utilizando `python`, basta seguir o seguinte.

```
from sympy import *
from sympy.physics.vector import ReferenceFrame
import numpy as np
mag, t, m, q, v0 = symbols('B, t, m, q, v_0', real=True, positive=True)

X = ReferenceFrame("X")
vx = Function("v_x")(t)
vy = Function("v_y")(t)
ax = Derivative(vx,t)
ay = Derivative(vy,t)
v = vx*X.x + vy*X.y
B = mag * X.z
F = q*v^B
Fx = F.dot(X.x)
Fy = F.dot(X.y)
v_x,v_y = dsolve((m*ax-Fx,m*ay-Fy), ics={vx.subs(t,0):v0, vy.subs(t,0):-v0})
v_x
```

$$\mathrm{v_x}(t) = -v_0 \sin\left(\frac{Bqt}{m}\right) + v_0 \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)$$

```
v_y
```

$$\mathrm{v_y}(t) = -v_0 \sin\left(\frac{Bqt}{m}\right) - v_0 \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)$$