

Integração

Introdução

Organização destes slides

Nestes slides:

- Cabeçalho em letras azuis: conteúdo já visto - MOTIVAÇÃO
- Cabeçalho em letras vermelhas: conteúdo NOVO
- Cabeçalho em letras pretas: Para REFLETIR

Objetivos desta parte da matéria

Generalizações do conceito de Integral de Riemann incluindo novos integrandos, novos domínios de integração, e principais resultados

- Trataremos o caso em que o integrando envolve

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^k,$$

em particular os casos em que $k = 1$ e $k = n$, e também o caso em que envolve ℓ -formas diferenciais.

- Os domínios de integração incluirão compactos de $\mathbf{R}^n$ e ℓ -superfícies orientadas de $\mathbf{R}^n$.
- Veremos uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo nesses contextos: o Teorema de Stokes.
- Casos particulares do Teorema de Stokes: Teorema de Green, Teorema da Divergência de Gauss, Teorema de Stokes “usual”.

Integrais já conhecidas

Integral em intervalo, integrais iteradas, integral de linha

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^k$$

Já conhecem

$$\begin{aligned} n &= 1, k = 1 \\ f : [a, b] \subset \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

e as generalizações

Integrais iteradas

$$n \geq 2, k = 1$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} n &= 2, f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Integral de linha

$$n = 2 \text{ ou } 3, k = 1$$

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\text{ou } f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

(densidades)

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \Omega \text{ (curva)}$$

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Aplicações de Integrais já conhecidas

Cálculo de áreas, volumes, comprimentos, massa, etc

Já conhecem os problemas:

$$f : [0, \pi] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \cos x$$

Exemplo 1: Área da figura delimitada pelo gráfico de f e o eixo dos x , em $[0, 2\pi]$:

$$A = \int_0^{2\pi} \cos x dx$$

Exemplo 2: Massa de um fio sobre o intervalo $[a, b]$ cuja densidade de massa é dada por f :

$$M = \int_0^{2\pi} \cos x dt$$

e as generalizações:

Aplicações de Integrais já conhecidas

Cálculo de áreas, volumes, comprimentos, massa, etc

e as generalizações:

$$f : [0, 1] \times [0, 2] \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = y + \cos x$$

Exemplo 3: Volume do sólido delimitado pelo gráfico de f e o plano xy , em $[0, 1] \times [0, 2]$:

$$V = \int_0^{2\pi} \cos x dt$$

Exemplo 2: Massa da placa sobre o retângulo $[0, 1] \times [0, 2]$ onde f é a densidade de massa:

$$M = \int_0^2 \int_0^1 (y + \cos x) dx dy$$

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \gamma(t) = (t, t^2) :$$

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = xy^2 + 1$$

Exemplo 4: Comprimento da curva γ

$$\begin{aligned} c(\gamma) &= \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt \end{aligned}$$

Exemplo 5: Massa de um fio sobre a curva γ cuja densidade de massa é f

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 (t^5 + 1) \sqrt{1 + 4t^2} dt \end{aligned}$$

Integral iterada é insatisfatória, e uso de integral de linha é insuficiente!

Veja alguns problemas!

Observe bem as situações abaixo:

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbf{Q} \text{ e } 0 \leq y \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } x \in \mathbf{Q} \text{ e } 1/2 < y \leq 1 \\ 0, & \text{se } x \in \mathbf{Q}^c \text{ e } 0 \leq y \leq 1/2 \\ 1, & \text{se } x \in \mathbf{Q}^c \text{ e } 1/2 < y \leq 1 \end{cases}$$

Existe

$$M = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

Porém, não existe

$$M = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

pois não existe $\int_0^1 f(x, y) dy$

Totalmente irrazoável
do ponto de vista da Física!

Usando integral de linha,
podemos calcular comprimento
e massa de um fio.

Que fazer para calcular área
e massa de uma placa em $\mathbf{R}^3$?

Refletir ...

- Por quê afirmou-se que a integral múltipla é insatisfatória? O quê o exemplo dado tem de tão importante? Existem exemplos em que ambas as integrais iteradas

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \text{ e } \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

existam e os resultados sejam diferentes?

Integração: o que veremos neste curso

Mudanças no “domínio de integração” e “tipo de integrando”

Integral Dupla $n = 2, k = 1$ $f : R \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ $R =$ retângulo, disco, etc. $\int_R f dA := ??$	Integral de campo ao longo de curva $n = k = 2 \text{ ou } n = k = 3$ $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \text{ ou } f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ (Campos de vetores) $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \Omega \text{ (curva)}$ $\int_\gamma f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$ (Já visto antes)
Integral Tripla $n = 3, k = 1$ $f : B \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ $B =$ bola, paralelepípedo, etc. $\int_B f dV := ??$	Integral de 1-forma $n = 2$ $P, Q : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \Omega \text{ (curva)}$ $\int_\gamma P dx + Q dy :=$ $\int_a^b [P(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + Q(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t)] dt$

Refletir ...

- Agora você saberia calcular

$$\int_{\gamma} (2xydx + ye^x dy)$$

onde $\gamma(t) = (2t, t^2)$, $t \in [0, 1]$?

Integração: o que veremos neste curso

Mudanças no “domínio de integração” e “tipo de integrando”

Integral de densidade em superfície $n = 3, k = 1$ $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ $\Phi \subset \Omega \text{ superfície de dim. } 2$ $(\Phi = \text{esfera, toro, etc.})$ $\int_{\Phi} f dS := ??$	Integral de campo em superfície $n = 3, k = 3$ $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $\Phi \subset \Omega \text{ superfície de dim. } 2$ $(\Phi = \text{esfera, toro, etc.})$ $\int_{\Phi} f \cdot \vec{n} dS := ??$
	Integral de 2-forma em ... $n = 3$ $P, Q, R : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ $\Phi : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \Omega$ $(\Phi \text{ é “superfície” em } \Omega)$ $\int_{\Phi} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy :=$ $:= ?? = \int_{[a,b] \times [c,d]} ??? dA$

Refletir ...

- Quais são os termos/conceitos que precisam ser introduzidos para as integrais da página anterior fazerem sentido?

Integrais Iteradas - Para lembrar

São “conhecidas”, mas insatisfatórias!

$$f : Q \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

n	“onde” integrar	integral
1	$Q = [a, b]$	$\int_a^b f(t) dt$
2	$Q = [a, b] \times [c, d]$	$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$
3	$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$	$\int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right] dy \right\} dz$ $\int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right] dx \right\} dz$ $\int_{a_2}^{b_2} \left\{ \int_{a_3}^{b_3} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right] dz \right\} dy$ $\int_{a_2}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right] dx \right\} dy$ $\vdots$
n	$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$	$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ $\vdots$ $\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \dots \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n}$

Refletir ...

- Quantas integrais iteradas temos no último caso da página anterior?

Integral de linha - Para lembrar

Integral com respeito ao comprimento de arco - Conhecidas, mas insuficientes!

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

n	“onde” integrar	Integral	
2	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$	$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \ \dot{\gamma}(t)\ dt$	integral de uma densidade ao longo de γ
3	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^3$	$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \ \dot{\gamma}(t)\ dt$	integral de uma densidade ao longo de γ
n	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \ \dot{\gamma}(t)\ dt$	integral de uma densidade ao longo de γ
n	curva orientada $C \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$\int_C f ds$	integral de uma densidade ao longo de C

Integral de linha - Para lembrar

Integral de linha de um campo vetorial - Conhecidas, mas insuficientes!

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

n	“onde integrar”	integral	
2	curva parametrizada	$\int_{\gamma} f \cdot dr$ ou $\int f \cdot d\gamma$	integral de um campo
	$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$	$:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$	vetorial ao longo de γ
3	curva parametrizada	$\int_{\gamma} f \cdot dr$ ou $\int f \cdot d\gamma$	integral de um campo
	$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^3$	$:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$	vetorial ao longo de γ
n	curva parametrizada	$\int_{\gamma} f \cdot dr$ ou $\int f \cdot d\gamma$	integral de um campo
	$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$	vetorial ao longo de γ
n	curva orientada $C \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$\int_C f \cdot dr$	integral de um campo vetorial ao longo de C

Refletir ...

- Foi mesmo revisão o conteúdo das duas páginas anteriores?

O que veremos neste curso

Integral de 1-formas X Integral de linha de um campo vetorial

Campo vetorial $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ou 1-forma $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$

n	"onde integrar"	integral	Lê-se: Integral ...
2	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$	$f = (P, Q)$ ou $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$	
		$\int_{\gamma} f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (P(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(\gamma(t)) \dot{y}(t)) dt$	...do campo f ao longo de γ
		$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (P(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(\gamma(t)) \dot{y}(t)) dt$	...da 1-forma ω sobre γ
3	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$	$f = (P, Q, R)$ ou $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy + R(x, y)dz$	
		$\int_{\gamma} f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \int_a^b (P(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(\gamma(t)) \dot{y}(t) + R(\gamma(t)) \dot{z}(t)) dt$	...do campo f ao longo de γ
		$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (P(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(\gamma(t)) \dot{y}(t) + R(\gamma(t)) \dot{z}(t)) dt$	...da 1-forma ω sobre γ

O que veremos neste curso

Integral de 1-formas X Integral de linha de um campo vetorial

Campo vetorial $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ou 1-forma $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$

n	“onde” integrar	integral	Lê-se: Integral ...
n	curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ou $\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n$	
		$\int_{\gamma} f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) =$ $\int_a^b (f_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + f_n(\gamma(t))\dot{\gamma}_n(t)) dt$	...do campo f ao longo de γ
	$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$	$\int_{\gamma} \omega :=$ $\int_a^b (f_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + f_n(\gamma(t))\dot{\gamma}_n(t)) dt$	...da 1-forma ω sobre γ
n	curva orientada $\mathcal{C} \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$	$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ou $\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n$	
		$\int_{\gamma} f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) =$ $\int_a^b (f_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\dot{\gamma}_n(t)) dt$	...do campo f ao longo de $\mathcal{C}$
	$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$	$\int_{\gamma} \omega :=$ $\int_a^b (f_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\dot{\gamma}_n(t)) dt$	...da 1-forma ω sobre $\mathcal{C}$

Refletir ...

- Você já saberia, agora, calcular

$$\int_{\gamma} (x_1 x_2 dx_1 + x_4^2 dx_2 + x_1 x_3^2 dx_3 + (x_1 + x_4) dx_4)$$

onde $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$, $t \in [0, 1]$?

O que veremos neste curso

Integrais Múltiplas: Integral Dupla, Integral Tripla, Integral em $\mathbf{R}^n$

- Integrais Múltiplas:

Vamos definir as integrais abaixo em Matemática IV para $n \geq 2$ e

$$f : R \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

n	integrar na região $R \subset \mathbf{R}^n$	integral	Diz-se: Integral ...
1	$R = [a, b]$	$\int_a^b f(t) dt$	... simples ou de Comprimento
2	(a) $R = [a, b] \times [c, d]$, (b) $R = B_r[(\bar{x}, \bar{y})]$, (c) $R \subset \mathbf{R}^2$ compacto	$\int_R f dA = \iint_R f dA =$ $\int_R f dx dy = \iint_R f dx dy = ??$	... dupla ou de Área
3	(a) $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, (b) $R = B_r[(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})]$, (c) $R \subset \mathbf{R}^3$ compacto	$\int_R f dV = \iiint_R f dV =$ $\int_R f dx dy dz = \iiint_R f dx dy dz = ??$	... tripla ou de Volume
n	(a) $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, (b) $R = B_r[\bar{x}] \subset \mathbf{R}^n$, (c) $R \subset \mathbf{R}^n$ compacto	$\int_B f dV =$ $\int_B f dx_1 dx_2 \dots dx_n = ??$	... múltipla ou de Volume

O que veremos neste curso

Integral de Superfície - Integral de uma densidade sobre um superfície

- Integral de uma densidade sobre uma superfície:
Vamos definir as integrais abaixo em Matemática IV para $n \geq 2$ e $f : R \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

n	"onde" integrar	integral	
3	superfície parametrizada em $\mathbf{R}^3$ $\Phi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$	$\int_{\Phi} f \, dS$ $:= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \ N(u, v)\ \, dA$ $= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \ N(u, v)\ \, dudv$ $= ??$	integral de uma densidade (campo escalar) sobre Φ
3	superfície orientada $S \subset \mathbf{R}^3$	$\int_S f \, dS := ??$	integral de uma densidade (campo escalar) sobre S

O que veremos neste curso

Integral de Superfície - Integral de um campo vetorial sobre uma superfície

- Integral de um campo vetorial sobre uma superfície:
Vamos definir as integrais abaixo em Matemática IV para $n \geq 2$ e $f : R \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

n	"onde" integrar	integral	
3	superfície parametrizada em $\mathbf{R}^3$ $\Phi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$	$\int_{\Phi} f \cdot \vec{n} dS$ $:= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) dA$ $= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) dudv = ??$	integral de um campo vetorial sobre Φ
3	superfície orientada $S \subset \mathbf{R}^3$	$\int_S f \cdot \vec{n} dS := ??$	integral de um campo vetorial sobre S

Refletir ...

- Quais são os termos/conceitos que precisam ser introduzidos para as integrais das duas páginas anteriores fazerem sentido?

O que veremos neste curso

ℓ -formas diferenciais e integração em ℓ -superfícies orientadas em $\mathbf{R}^n$

- Vamos introduzir ℓ -forma diferencial em $\mathbf{R}^n$:

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\ell \leq n \\ i_1, \dots, i_\ell \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell}$$

- Vamos definir a integral abaixo em Matemática IV para $n \geq 2$ e $S \subset \mathbf{R}^n$ uma ℓ -superfície:

$$\int_S \omega dS$$

- Vamos introduzir derivação de ℓ -forma diferencial.
- Vamos provar uma versão do Teorema de Stokes:

$$\text{"Sob certas hipótese, } \int_{\mathcal{R}} (d\omega) = \int_{S=\partial\mathcal{R}} \omega."$$

O que veremos neste curso

Aplicações de integral múltipla, integral de linha, integral de superfície

Veremos em Matemática IV:

- Comprimento e Massa de um fio em $\mathbf{R}^n$. (na verdade, já visto antes)
- Trabalho realizado ao deslocar um ponto material ao longo de uma curva orientada $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$. (na verdade, já visto antes)
- Volume e Massa de um sólido em $\mathbf{R}^n$.
- Centro de massa de um sólido em $\mathbf{R}^n$.
- Centro de massa de um fio em $\mathbf{R}^n$.
- Área e Massa de uma hipersuperfície em $\mathbf{R}^n$
- Centro de massa de uma superfície em $\mathbf{R}^n$.
- Fluxo de um campo vetorial através de uma hipersuperfície orientada em $\mathbf{R}^n$.
- Etc.

Integral em $\mathbf{C}$

Se o tópico extra “Funções Analíticas” for tratado, veremos, para

$$f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \text{ e } \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C},$$

o conceito de

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

bem como os principais teoremas.