Exemplo:

Encontrar um sistema coordenado $x'y'$ de tal maneira que a equação (em coordenadas xy)

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

não possua termos lineares.

Aplicando a translação, temos:

$$4(x'+h)^2 - 4(x'+h)(y'+K) + 7(y'+K)^2 + 12(x'+h) + 6(y'+K) - 9 = 0$$

$$4(x'^2 + 2x'h + h^2) - 4(x'y' + x'K + y'h + hK) + 7(y'^2 + 2Ky' + K^2) + 12x' + 12h + 6y' + 6K - 9 = 0$$

$$4x'^2 + 8hx' + 4h^2 - 4x'y' - 4Kx' - 4hy' - 4hK + 7y'^2 + 14Ky' + 7K^2 + 12x' + 12h + 6y' + 6K - 9 = 0$$

$$4x'^2 + 7y'^2 - 4x'y' + (+8h - 4K + 12)x' + (-4h + 14K + 6)y' + 4h^2 - 4hK + 7K^2 + 12h + 6K - 9 = 0$$

Para eliminar os termos lineares da equação, precisamos encontrar valores de h e K, tal que:

$$\begin{cases} +8h - 4K + 12 = 0 \\ -4h + 14K + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} +8h - 4K + 12 = 0 \\ -8h + 28K + 12 = 0 \\ \hline 0 + 24K + 24 = 0 \end{array}$$

$$K = \frac{-24}{24} = -1 \rightarrow \underline{K = -1}$$

$-4h + 14(-1) + 6 = 0$

$h = \dfrac{8}{-4}$

$h = -2$

Logo, $h = -2$ e $K = -1$.

$\therefore \; 4x'^2 + 7y'^2 - 4x'y' + 0x' + 0y' + 4(-2)^2 - 4(-2)(-1) + 7(-1)^2 + 12(-2) + 6(-1) - 9 = 0$

$4x'^2 + 7y'^2 - 4x'y' + 16 - 8 + 7 - 24 - 6 - 9 = 0$

$$\boxed{4x'^2 + 7y'^2 - 4x'y' - 24 = 0}$$

Portanto, no sistema $x'y'$ obtido pela translação dos eixos xy até $(-1, -2)$, temos:

$$4x'^2 - 4x'y' + 7y'^2 - 24 = 0$$

Pergunta:

Existe alguma mudança de coordenadas que elimina o termo misto Cxy das formas quadráticas?

Resposta:

Sim, são conhecidas como rotações.

Rotações e eliminação do termo misto

Se queremos encontrar um novo sistema coordenado $x'y'$ de tal maneira que a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

não tenha o termo ~~do~~ misto em $x'y'$, fazemos uma rotação por um ângulo α e obtemos:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

- $A(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)^2 + B(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 + C(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)$
$+ D(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) + E(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$

$$A(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + y'^2\operatorname{sen}^2\alpha) + B(x'^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$$
$$+ y'^2\cos^2\alpha) + Cx'\cos\alpha\, x'\operatorname{sen}\alpha + Cx'\cos\alpha\, y'\cos\alpha - Cy'\operatorname{sen}\alpha\, x'\operatorname{sen}\alpha -$$
$$- Cy'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + Dx'\cos\alpha - Dy'\operatorname{sen}\alpha + Ex'\operatorname{sen}\alpha + Ey'\cos\alpha + F = 0$$

$$Ax'^2\cos^2\alpha - 2Ax'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + Ay'^2\operatorname{sen}^2\alpha + Bx'^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2Bx'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$$
$$+ By'^2\cos^2\alpha + Cx'^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + Cx'y'\cos^2\alpha - Cx'y'\operatorname{sen}^2\alpha - Cy'^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$$
$$+ Dx'\cos\alpha - Dy'\operatorname{sen}\alpha + Ex'\operatorname{sen}\alpha + Ey'\cos\alpha + F = 0$$

- $(A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)x'^2 + (A\operatorname{sen}^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)y'^2$
$+ (-2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha)x'y' +$
$+ (D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha)x' + (-D\operatorname{sen}\alpha + E\cos\alpha)y' + F = 0$

$\therefore\ A' = A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$

$B' = A\operatorname{sen}^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$

$C' = -2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha$

$D' = D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha$

$E' = E\cos\alpha - D\operatorname{sen}\alpha$

$F' = F$

Como queremos eliminar o termo misto $x'y'$, então:

$$C' = 0$$

$$-2A\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 2B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha - C\,\text{sen}^2\alpha = 0$$

$$(B-A)\,2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) = 0$$

- Identidade trigonométrica : $\underline{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta}$

: $\underline{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta}$

$$(B-A)\,\text{sen}\,2\alpha + C\cos 2\alpha = 0$$

$$(B-A)\,\text{sen}\,2\alpha = -C\cos 2\alpha$$

$$\frac{(A-B)}{C} = \frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}$$

$$\therefore \boxed{\cot g\, 2\alpha = \frac{A-B}{C}}$$

Portanto, se essa equação é satisfeita a equação quadrática da cônica pode ser escrita como:

- $A'x'^2 + B'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$

Como queremos determinar A' e B', temos que:

$$\rightarrow A' + B' = A\cos^2\alpha + B\,\text{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + A\,\text{sen}^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

$$A' + B' = A\,(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + B(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)$$

$$\therefore A' + B' = A + B$$

$$A' - B' = A\cos^2\alpha + B\,\text{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - A\,\text{sen}^2\alpha - B\cos^2\alpha + C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= (A-B)\cos^2\alpha + (B-A)\,\text{sen}^2\alpha + 2C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= (A-B)\cos^2\alpha - (A-B)\,\text{sen}^2\alpha + 2C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= (A-B)\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) + 2C\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

- Identidade trigonométrica: $\underline{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$

$$\underline{\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$$A' - B' = (A-B)\cos 2\alpha + C\,\text{sen}\,2\alpha$$

Sabendo que: $A - B = C\cot 2\alpha$

$$A' - B' = C\cot 2\alpha\cos 2\alpha + C\,\text{sen}\,2\alpha$$

$$= C\,\frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}\cos 2\alpha + C\,\text{sen}\,2\alpha$$

$$= C\left(\frac{\cos^2 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha} + \text{sen}\,2\alpha\right)$$

$$= C\left(\frac{\cos^2 2\alpha + \text{sen}^2 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}\right)$$

$$= C\,\frac{1}{\text{sen}\,2\alpha}$$

$$\therefore\quad A' - B' = \frac{C}{\text{sen}\,2\alpha}$$

Podemos utilizar a identidade $\operatorname{sen}^2 2\theta = 1/(1+\operatorname{cotg}^2 2\theta)$.

para calcular $\operatorname{sen} 2\theta$.

Conclusão:

Fazendo uma rotação por um ângulo α tal que $\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{A-B}{C}$ na equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (I)$$

obtemos um sistema coordenado $x'y'$ onde a equação (I) é dada por

$$A'x'^2 + B'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

onde A' e B' são obtidos da solução do sistema:

$$A' + B' = A + B$$

$$A' - B' = \frac{C}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Observação: Os termos D' e E' podem ser cancelados utilizando translações, por esse motivo não nos preocupamos em determiná-los.

Exercício:

Encontrar um sistema coordenado $x'y'$ de tal modo que a equação

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

não possua termos lineares nem mistos.

Vimos, no exercício anterior, que fazendo uma translação até o ponto $(-2, -1)$ obtivemos um sistema coordenado $x'y'$ sem os termos lineares. Essa equação é dada por:

$$4x'^2 - 4x'y' + 7x'^2 - 24 = 0$$

Agora, queremos encontrar um sistema coordenado $x''y''$ onde esta equação não possua o termo misto

Para isso, devemos considerar uma rotação por um ângulo α que satisfaz

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{A - B}{C}$$

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{4 - 7}{-4} = \frac{3}{4}$$

Com isso, a equação no sistema coordenado $x''y''$

$$A'x''^2 + B'y''^2 - 24 = 0$$

onde A' e B' podem ser encontrado pelo sistema:

$$\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = \dfrac{C}{\operatorname{sen} 2\alpha} \end{cases}, \text{ onde } \operatorname{sen}^2 2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}$$

$$\therefore \quad A' + B' = 4 + 7 = 11$$

$$A' - B' = \frac{-4}{\sqrt{\frac{1}{1 + (3/4)^2}}} = \frac{-4}{\sqrt{\frac{1}{25/16}}} = \frac{-4}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = -\frac{4}{4} \cdot 5 = -5$$

$$\therefore \begin{cases} A' + B' = 11 \\ A' - B' = -5 \end{cases}$$

$$2A' + 0 = 6$$

$$\underline{A' = 3}$$

$$3 - B' = -5$$

$$\underline{B' = 8}$$

Logo, como $A' = 3$ e $B' = 8$, temos:

$$3x''^2 + 8y''^2 - 24 = 0$$

ou seja,

$$\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{3} = 1$$

$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{5} \quad \therefore \quad \alpha = 26.6^\circ$

$$\frac{x''^2}{2.8^2} + \frac{y''^2}{1,7} = 1$$