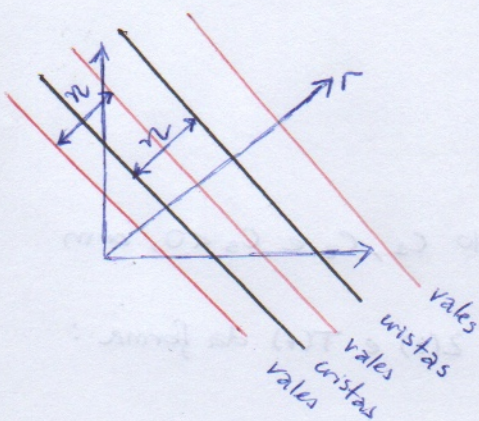


Dessa maneira, $C(x,y,t)$ e $S(x,y,t)$ tem suas cristas e vales na forma de retas perpendiculares ao eixo r .

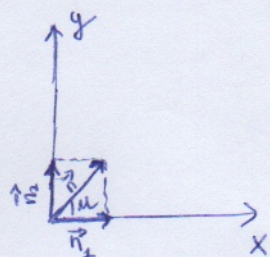


Essa geometria da solução da equação de onda é denominada onda linear (as frentes são retas). A distância entre duas frentes com a mesma fase (por exemplo, duas cristas de dois vales consecutivos) define o comprimento de onda η , tal que:

$$r \cdot \eta = 2\pi, \text{ então: } r = \frac{2\pi}{\eta}. \text{ Considerando } C \text{ ou } S$$

para (x,y) fixo e t variável, essas funções periódicas de t com período $r \cdot a T = 2\pi \Rightarrow r = \frac{2\pi}{\eta}$ e $T = \frac{\eta}{a}$.

Considerando que $\vec{n}$ tenha ângulo μ em relação ao eixo x , então:



$$\text{com } |\vec{n}_x| = |\vec{n}| \cdot \cos(\mu) = \cos(\mu)$$

$$|\vec{n}_y| = |\vec{n}| \cdot \sin(\mu) = \sin(\mu)$$

sendo μ a direção de propagação de ondas. Desse modo, as soluções C e S podem ser escritas como:

$$C(x,y,t) = \cos \left[\frac{2\pi}{\eta} \cdot (x \cdot \cos(\mu) + y \cdot \sin(\mu) \pm at) \right] \quad (449)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin \left[\frac{2\pi}{\eta} \cdot (x \cdot \cos(\mu) + y \cdot \sin(\mu) \pm at) \right] \quad (450)$$

Solução da Equação de onda 3D em coordenadas Cartesianas

Seja $u \equiv u(x,y,z,t)$ solução da equação de onda 3D:

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (451)$$

Aplicando-se o método de separação de variáveis na equação (451), chegamos à:

$$u(x,y,z,t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (452)$$

Após substituírmos a equação (452) na equação (451) e desmembrarmos o resultado de maneira apropriada, obtemos um conjunto de 4 equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C_1, \quad (453)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2, \quad (454)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = C_3, \quad (455)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (456)$$

Como visto nos casos 1D e 2D, as soluções de interesse ocorrem quando C_1, C_2 e $C_3 < 0$, com $C_1 = -\lambda^2, C_2 = -\alpha^2$ e $C_3 = -\beta^2$, com soluções para $X(x), Y(y), Z(z)$ e $T(t)$ da forma:

$$X(x) = e^{i\lambda x} \quad (457)$$

$$Y(y) = e^{i\alpha y} \quad (458)$$

$$Z(z) = e^{i\beta z} \quad (459)$$

$$T(t) = e^{\pm a\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2}it} \quad (460)$$

sendo λ, α e β constantes reais arbitrárias. Utilizando-se dos mesmos procedimentos do caso 2D, chega-se a soluções na forma de ondas planas:

$$C(x, y, z, t) = \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z \pm at) \right] \quad (461)$$

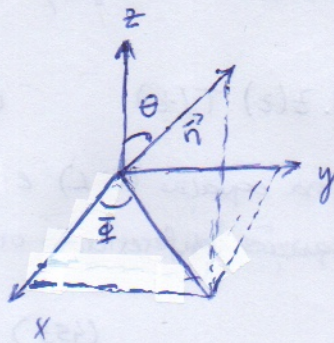
$$S(x, y, z, t) = \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (n_1 x + n_2 y + n_3 z \pm a \cdot t) \right] \quad (462)$$

sendo n_1, n_2 e n_3 as componentes Cartesianas de um vetor unitário $\vec{n}$. As frentes de onda são planos perpendiculares a $\vec{n}$:

$$n_1 = \sin(\theta) \cdot \cos(\Phi)$$

$$n_2 = \sin(\theta) \cdot \sin(\Phi)$$

$$n_3 = \cos(\theta)$$

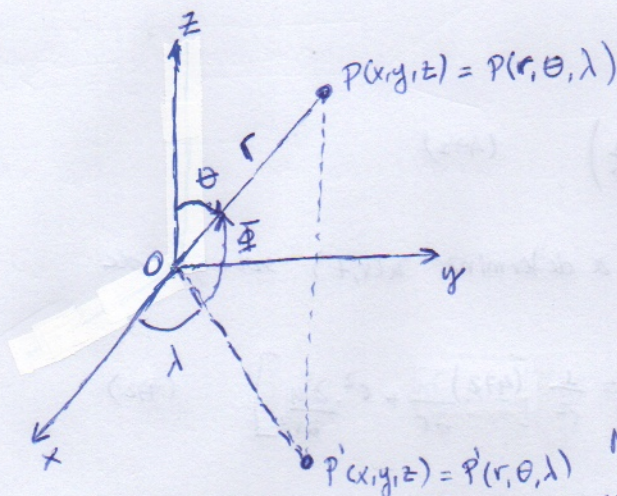


θ = colatitude

Φ = longitude

Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é apresentado na figura abaixo



$r = \overline{OP}$ - raio vetor

$\theta = \text{colatitude}$: ângulo entre Oz e $\overline{OP}$

$\lambda = \text{longitude}$: ângulo Ox e OP'

No lugar da colatitude θ , pode-se usar a latitude Φ .

$\Phi = \text{ângulo entre } OP' \text{ e } OP$, sendo $\theta + \Phi = \frac{\pi}{2}$

As coordenadas esféricas compreendem três coordenadas : r , que dá a distância entre a origem O e o ponto P considerado; θ mede o ângulo entre a reta definida pelo eixo z e a definida pela origem e o ponto P ; e λ , que mede o ângulo entre a projeção de reta definida pela origem e P , no plano xy , e o eixo x , $\overline{OP'}$. A transformação entre coordenadas cartesianas e esféricas é dada por :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (463)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad (464)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (465)$$

e a relação inversa é dada por :

$$x = r \sin \theta \cdot \cos(\lambda) \quad (466)$$

$$y = r \sin \theta \cdot \sin(\lambda) \quad (467)$$

$$z = r \cdot \cos \theta \quad (468)$$

Mostra-se, a partir da relação entre coordenadas cartesianas e esféricas que o Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por :

$$\nabla^2 u(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \quad (469)$$

Solução da equação de onda em coordenadas esféricas

O caso geral é determinar a solução de :

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u(r, \theta, \lambda) \quad (470)$$

sendo $u(r, \theta, \lambda, t)$ a solução. Neste caso, vamos procurar a solução radialmente simétrica $u(r, t)$.

Assim, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$, tal que:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (471)$$

Dessa forma, o problema resume-se a determinar $u(r, t)$ solução de

$$u_{tt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \quad (472)$$

A equação (472) pode ser reescrita como:

$$u_{tt} = a^2 \left[u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right] \quad (473)$$

Aplicando o método de separação de variáveis na equação (473), obtemos:

$$u(r, t) = R(r) \cdot T(t) \quad (474)$$

Derivando-se a equação (474) em relação a r e a t , temos:

$$u_{tt} = R(r) \cdot T''(t), \quad (475)$$

$$u_r = R'(r) \cdot T(t), \quad (476)$$

$$u_{rr} = R''(r) \cdot T(t) \quad (477)$$

Substituindo as equações (475), (476) e (477) na equação (473), obtemos:

$$R(r) \cdot T''(t) = a^2 \left[R''(r) \cdot T(t) + \frac{2}{r} R'(r) \cdot T(t) \right] \quad (478)$$

Separando-se as variáveis na equação (478) fazendo-se a divisão dela por $R(r) \cdot T''(t)$, temos:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} \quad (479)$$

Dessa forma, o método de separação de variáveis converteu a E.D.P. (473) em duas diferentes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(+)}{T(+)} = C & (480.a) \\ \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} = C & (480.b) \end{cases}$$

A equação (480.b) pode ser reescrita como:

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) - R(r) \cdot C = 0 \quad (481)$$

A equação (481) é uma E.D.O. linear, homogênea, porém a coeficientes variáveis. Fazendo a mudança de variável $w(r) = r \cdot R(r)$, a equação (481) se torna a coeficientes constantes:

$$R = w \cdot r^{-1}, \quad R' = -r^{-2} \cdot w + w' \cdot r^{-1}, \quad R'' = 2 \cdot r^{-3} w - r^{-2} w' + w'' \cdot r^{-1} - r^{-2} w$$

$$\frac{w''}{r} - \frac{2w'}{r^2} + \frac{2w}{r^3} + \frac{2}{r} \left(\frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} \right) - C \cdot \frac{w}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{w''}{r} - C \cdot \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} [w'' - Cw] = 0. \quad \text{Disso resulta que:}$$

$$w'' - C \cdot w = 0 \quad (482)$$

Tomando-se $C < 0$ e $C = -\lambda^2$, com λ real diferente de zero, chegamos à:

$$w'' + \lambda^2 w = 0 \quad (483)$$

O polinômio característico associado a esta E.D.O. é dado por:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \quad (484)$$

com raízes dadas por $p = \pm \lambda i$. A solução da E.D.O. (483) é da forma?

$$w(r) = e^{\lambda i r}$$

com solução geral dada por:

$$w(r) = A \cdot e^{+\lambda i r} + B \cdot e^{-\lambda i r} \quad (485)$$

Como $w(r) = r \cdot R(r)$, então:

$$R(r) = \frac{w(r)}{r} = A \cdot \frac{e^{+\lambda i r}}{r} + B \cdot \frac{e^{-\lambda i r}}{r} \quad (486)$$

Voltando à equação (480.a), para $C < 0$ e $C = -\lambda^2$, ou seja, para soluções fisicamente realizáveis,

Chegamos à:

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (487)$$

com solução da forma:

$$T(t) = e^{\pm i a \lambda t} \quad (488)$$

Substituindo $R(r)$ e $T(t)$ em $u(r, t)$, obtemos:

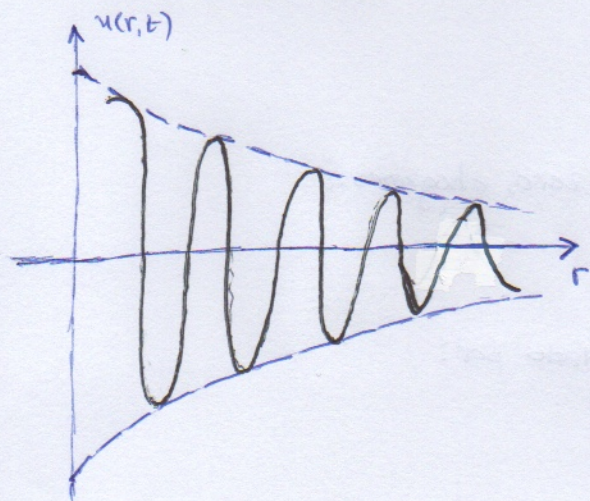
$$u(r, t) = \frac{\pm}{r} \cdot e^{i \lambda (r \pm a t)} \quad (489)$$

Da forma complexa, resultam as seguintes soluções na forma real:

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{\cos[\lambda(r \pm a t)]}{r} \\ \frac{\sin[\lambda(r \pm a t)]}{r} \end{cases}$$



Frentes de onda são superfícies esféricas



A diminuição da amplitude de $u(r, t)$ com o aumento de r deve à distribuição da energia da onda sobre superfícies esféricas com raio cada vez maiores.

A energia distribui-se em superfícies esféricas com áreas cada vez maior, o que se reflete na diminuição da amplitude.

Equação de Laplace

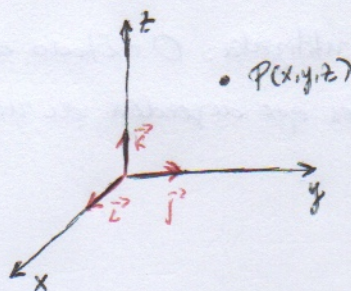
Um contexto no qual surge a equação de Laplace é na solução estacionária da equação de difusão: $u_t = \nabla^2 u \Rightarrow$ solução estacionária: $u_t = 0 \therefore \nabla^2 u = 0$. No entanto, a aplicação mais relevante da equação de Laplace é na Teoria do Potencial. Da teoria do Potencial, tem-se que campos de forças, ditos conservativos, admitem uma função escalar, chamada potencial, a qual é harmônica e tem a propriedade de que o campo é igual ao gradiente do potencial. A equação de Laplace é dada por:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (490)$$

Funções que satisfazem a equação de Laplace são também chamadas de funções harmônicas. Em Geofísica, lidamos com os seguintes campos conservativos:

- (a) Campo elétrico;
- (b) Campo gravitacional (o campo de gravidade não é conservativo);
- (c) Campo magnético em regiões sem correntes elétricas.

Como exemplo, consideremos o campo gravitacional:



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários na direção dos eixos coordenados.

O campo gravitacional é uma função vetorial $\vec{g}(x, y, z)$ que atribui o vetor aceleração gravitacional a cada ponto do espaço. Podemos escrever $\vec{g}$ em termos dos vetores unitários $\vec{g}(x, y, z) = g_1(x, y, z)\vec{i} + g_2(x, y, z)\vec{j} + g_3(x, y, z)\vec{k}$.

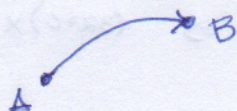
O campo gravitacional é descrito, portanto, por 3 funções escalares: $g_1(x, y, z)$, $g_2(x, y, z)$ e $g_3(x, y, z)$.

Na teoria do potencial, mostra-se que quando o campo é conservativo, então existe uma função escalar, $V(x, y, z)$, chamada potencial, a qual é harmônica ($\nabla^2 V = 0$) e é tal que $\vec{g}(x, y, z) = -\text{grad}(V(x, y, z))$:

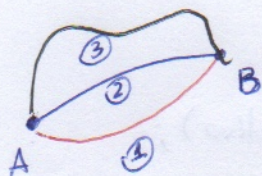
$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ g_2(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ g_3(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Campo Conservativo

O campo gravitacional significa que uma massa pontiforme m colocada no ponto (x, y, z) experimenta uma força $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$. Movimentando a massa de um ponto A para um ponto B a força realiza um trabalho.



O campo é dito conservativo quando o trabalho realizado depende apenas dos pontos inicial e final (A, B) e não depende da trajetória.



Solução da Equação de Laplace

A equação de Laplace pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, o qual nos leva a diversas formas de solução, dependendo do tipo de coordenadas utilizada. O método da separação de variáveis exprime a solução na forma de produto de funções que dependem de uma só variável:

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad \text{cartesianas}$$

$$u(r, \theta, z) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \quad \text{cilíndricas}$$

$$u(r, \theta, \lambda) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Lambda(\lambda) \quad \text{esféricas}$$

No entanto, existem soluções da Equação de Laplace que não são de variáveis separadas. No caso, essas soluções são na forma de polinômios homogêneos. Considerando coordenadas cartesianas 2D, por exemplo, existem soluções $u(x, y)$ tais que $u(x, y)$ é um polinômio em x e y .

Polinômios homogêneos: São polinômios no qual os termos com coeficientes não nulos tem o mesmo grau total do polinômio.

grau 1: $u(x, y) = a \overset{\text{mesmo grau}}{x} + b \overset{\text{mesmo grau}}{y}$

grau 2: $u(x, y) = a \overset{\text{mesmo grau}}{x^2} + b \overset{\text{mesmo grau}}{xy} + c \overset{\text{mesmo grau}}{y^2}$

grau 3: $u(x, y) = a \overset{\text{mesmo grau}}{x^3} + b \overset{\text{mesmo grau}}{x^2y} + c \overset{\text{mesmo grau}}{xy^2} + d \overset{\text{mesmo grau}}{y^3}$

grau n : $u(x, y) = a_1 \cdot x^n \cdot y^0 + a_2 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + a_3 \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + a_{n+1} \cdot x^0 \cdot y^n = \sum_{k=0}^n a_k x^{(n-k)} \cdot y^k$

Para encontrar polinômios homogêneos harmônicos, basta substituir o polinômio na equação de Laplace e determinar os coeficientes. Tomando-se, por exemplo, um polinômio de grau 3, temos!

$$u_{xx} = 6ax + 2by \quad \text{e} \quad u_{yy} = 2cx + 6dy \quad \Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow$$

$$6ax + 2by + 2cx + 6dy = 0 \Rightarrow 3ax + by + cx + 3dy = 0 \Rightarrow (3a+c)x + (b+3d)y = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 & \Rightarrow c = -3a \\ b + 3d = 0 & \Rightarrow b = -3d \end{cases}$$

Como estamos supondo que o polinômio homogêneo de grau 3 é solução, então:

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \Rightarrow u(x, y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 \Rightarrow$$

$$u(x, y) = a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y), \text{ com } a \text{ e } d \text{ constantes.}$$

Essa equação é solução da equação de Laplace na forma de um polinômio homogêneo de grau 3.

Disso, resulta que existem duas soluções linearmente independentes: $u_1(x, y) = x \cdot (x^2 - y^2)$ e

$u_2(x, y) = y \cdot (y^2 - x^2)$ e a solução geral é a combinação linear dessas duas soluções (princípio da superposição): $u(x, y) = a \cdot u_1 + d \cdot u_2$. No caso de coordenadas cartesianas 3D, igualmente existem funções harmônicas na forma de polinômios homogêneos.

Polinômio homogêneo 3D: Um polinômio homogêneo 3D de grau n tem termos na forma:

$$x^i \cdot y^j \cdot z^k$$

com $i + j + k = n$. Assim, para polinômios de grau 3, temos:

$$x^3 \cdot y^0 \cdot z^0 = x^3$$

$$x^2 \cdot y^1 \cdot z^0 = x^2 y$$

$$x^1 \cdot y^2 \cdot z^0 = xy^2$$

$$x^0 \cdot y^3 \cdot z^0 = y^3$$

$$x^2 \cdot y^0 \cdot z^1 = x^2 z$$

$$x^1 \cdot y^1 \cdot z^1 = xyz$$

$$x^0 \cdot y^2 \cdot z^1 = y^2 z$$

$$x^1 \cdot y^0 \cdot z^2 = xz^2$$

$$x^0 \cdot y^1 \cdot z^2 = yz^2$$

$$x^0 \cdot y^0 \cdot z^3 = z^3$$

Portanto,

$$u(x, y, z) = a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 xy^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 z + a_6 xyz + a_7 y^2 z + a_8 xz^2 + a_9 yz^2 + a_{10} z^3$$

Existem soluções na forma de um polinômio homogêneo e de qualquer grau do polinômio. Qualquer polinômio de grau 0 ou 1 é solução da equação de Laplace. Para graus maiores do que 1, nem todo polinômio é solução.

Equação de Laplace em coordenadas Cartesianas - Separação de Variáveis

Outra forma de solução da equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas cartesianas é obtida pelo método de separação de variáveis.

Coordenadas Cartesianas 2D

Como feito para o caso da equação de onda, procuramos por soluções do tipo:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (491)$$

Se derivarmos a equação (491) duas vezes em relação a x e a y , chegamos à:

$$u_{xx} = X''(x) \cdot Y(y) \quad (492)$$

e

$$u_{yy} = X(x) \cdot Y''(y) \quad (493)$$

Substituindo as equações (492) e (493) na equação (490), obtemos:

$$u_{xx} + u_{yy} = X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \quad (494)$$

Separando as variáveis na equação (494), temos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = - \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (495)$$

Como o 1º membro da equação (495) depende apenas da variável x e o 2º membro depende de y , sendo x e y variáveis independentes, então a única maneira de satisfazer a equação (495) para todo x e y é:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C \quad (496)$$

e

$$- \frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \quad (497)$$

Seja C uma constante. Para diferentes valores de C , temos:

$$C=0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de uma reta} \\ (497) \text{ solução na forma de uma reta} \end{cases}$$

$$C>0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de exponenciais} \\ (497) \text{ solução na forma de seno e cosseno} \end{cases}$$

$$C<0 \Rightarrow \begin{cases} (496) \text{ solução na forma de seno e cosseno} \\ (497) \text{ soluções na forma de exponenciais} \end{cases}$$

Vamos explorar a situação $C<0$. Tomando-se $C=-\lambda^2$, sendo λ um real diferente de zero, da equação (496), temos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (498)$$

Sabemos que a solução da E.D.O. (498) é da forma:

$$X(x) = e^{px} \quad (499)$$

sendo p a raiz do polinômio característico:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \quad (500)$$

com raízes dadas por $p = \pm \lambda i$. Cada valor de λ fornece duas soluções linearmente independentes para a equação (498):

$$X(x) = A \cdot e^{i\lambda x} + B \cdot e^{-i\lambda x} \quad (501)$$

Resolvendo-se, agora, a equação (497), temos:

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \quad (502)$$

a qual possui solução da forma:

$$Y(y) = C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y} \quad (503)$$

Combinando-se as equações (501) e (503), temos:

$$u(x,y) = (A \cdot e^{i\lambda x} + B \cdot e^{-i\lambda x}) \cdot (C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y}) \quad (504)$$

com A, B, C e D constantes arbitrárias.

Manipulando-se os coeficientes A e B, obtem-se a solução da equação (504) na forma real como:

$$u(x,y) = (\alpha \cos(\lambda x) + \beta \sin(\lambda x)) \cdot (C \cdot e^{-\lambda y} + D \cdot e^{\lambda y}) \quad (505)$$

A determinação das constantes arbitrárias vai depender das condições de contorno do problema.

Explorando soluções da equação (505), temos:

Situações para divergência da solução:

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x) \cdot e^{\lambda y} & (506.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x) \cdot e^{\lambda y} & (506.b) \end{cases} \Rightarrow y \rightarrow \infty, \text{ então } u \rightarrow \infty$$

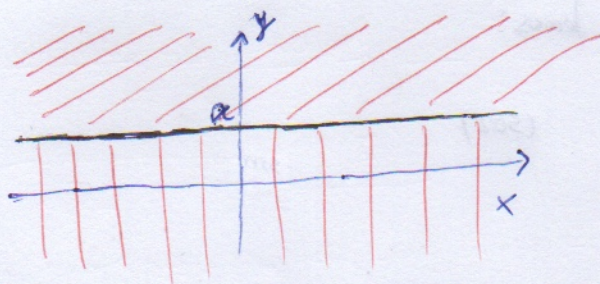
$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x) \cdot e^{-\lambda y} & (507.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x) \cdot e^{-\lambda y} & (507.b) \end{cases} \Rightarrow y \rightarrow -\infty \text{ então } u \rightarrow \infty$$

Situações para convergência da solução:

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x) \cdot e^{\lambda y} & (508.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x) \cdot e^{\lambda y} & (508.b) \end{cases} \Rightarrow y \rightarrow -\infty, \text{ então } u \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \cos(\lambda x) \cdot e^{-\lambda y} & (509.a) \\ u(x,y) = \sin(\lambda x) \cdot e^{-\lambda y} & (509.b) \end{cases} \Rightarrow y \rightarrow \infty, \text{ então } u \rightarrow 0$$

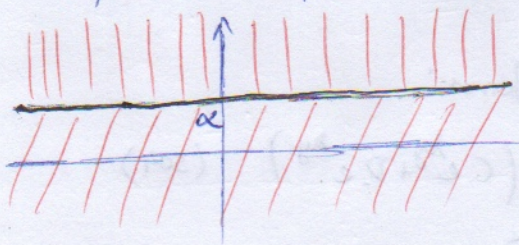
No caso em que $u(x,y)$ é o potencial associado a um campo de força (elétrico, gravitacional), mostra-se na teoria do potencial que $u(x,y) \rightarrow 0$ quando o ponto (x,y) afasta-se das fontes do campo (cargas elétricas ou massa). Desse modo, a forma (506) corresponde à situação em que as fontes do campo localizam-se em um semiplano $y > \alpha$ e $u(x,y)$ é válida na região $y \leq \alpha$.



Região das fontes do potencial $y > \alpha$

Região de validade de $u(x,y)$ $y \leq \alpha$

A forma dada por (507) define a situação complementar:



Região de validade de $u(x,y)$ $y \geq \alpha$

Região das fontes do potencial $y < \alpha$