

- Mapas discretos

(1)

Vamos iniciar nossa discussão com o exemplo de um mapa unidimensional:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \left[\begin{array}{c} \text{intervalo de tempo} \\ \text{discretos} \end{array} \right]$$
$$n=0, 1, 2, \dots$$

$$x_1 = F(x_0); \quad x_2 = F(x_1) \equiv F(F(x_0)) \equiv F^{(2)}(x_0),$$

dado um x_0 nós iteramos para encontrarmos x_n . Os pontos fixos do mapa são

$$X = F(X) \quad [\text{ponto fixo } X]$$

Para estudar sua estabilidade, escrevemos $X = x_n + \varepsilon_n$ e expandimos para ε_n pequeno:

$$F(x_n) = F(X - \varepsilon_n) = F(X) - \varepsilon_n F'(X) + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 F''(X) + \dots,$$

$$\text{com } F'(X) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=X}.$$

$$- F'(X) \neq 0 \quad (\text{desprezamos } F''(X))$$

$$F(x_n) - F(X) = -\varepsilon_n F'(X)$$

$$x_{n+1} - X = -\varepsilon_n F'(X)$$

" $x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$ "

$$+ \varepsilon_{m+1} = + \varepsilon_m F'(x)$$

(2)

Se $|F'(x)| < 1$ temos então que o erro diminui com sucessivas aplicações do mapa e temos uma convergência de primeira ordem para um atrator.

$$- F'(x) = 0 \text{ e } F''(x) \neq 0$$

$\varepsilon_{m+1} = -\frac{1}{2} F''(x) \varepsilon_m^2$: Convergência de segunda ordem. Aqui sempre convergimos se começamos nas vizinhanças do ponto fixo. Um exemplo é o método de Newton-Raphson:

$f(x) = 0$, $x_{m+1} = x_m - f(x_m)/f'(x_m)$. Cada uma das raízes possui uma bacia de atração e todas podem ser encontradas por escolhas adequadas do palpite inicial x_0 .

Um exemplo mais simples é o mapa linear:

$$x_{m+1} = r x_m \Rightarrow x_m = r^m x_0$$

$0 \leq r < 1$: $x_m \rightarrow 0, \forall x_0$ [$x=0$ é assintoticamente estável]
 $r = 1$: $x_m = x_0, \forall x_0$ [estado estacionário]

• $r > 1$: $x_n = x_0 e^{n \ln r}$ [crescimento exponencial] ③

veremos assim que a taxa r controla o destino da evolução temporal

- Mapa logístico

Em um modelo ecológico queremos modelar, por exemplo, a evolução de uma população de uma certa espécie. Pode ser conveniente medirmos o tempo de forma discreto, com o passo sendo dado pela distância entre gerações (~ 30 anos para humanos). O mapa linear possui essa característica, contudo ele leva à extinção e/ou crescimento exponencial. Um modelo um pouco mais realístico é o mapa logístico:

$$x_{n+1} = r x_n - s x_n^2,$$

esse é um mapa não linear: $r \rightarrow$ taxa de reprodução
 $s \rightarrow$ pune superpopulações (recursos finitos)
 É conveniente realizarmos a seguinte mudança de escala:

$x_n \rightarrow x_{n+1} r/2$, donde resum que

(4)

$$r/2 x_{n+1} = r^2/2 x_n - r^2/2 x_n^2$$

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n),$$

e resumos que o modelo só depende do parâmetro r .

O interesse físico e biológico do modelo é limitado a $x \in [0, 1]$, com $x=1$ sendo a população máxima.

Para tal, devemos limitar $0 \leq r \leq 4$. Para ver

isso, faça $F(x) = r x (1 - x)$. A derivada do mapa é então $F'(x) = r(1 - 2x)$. Como

$F''(x) < 0$, o ponto de máximo ocorre para

$$x_{\max} = 1/2. \quad F(x_{\max}) = r/4 \Rightarrow r \leq 4.$$

Existem dois pontos fixos no sistema ($x = F(x)$)

$$x = r x (1 - x); \quad x = 0, \quad x = 1 - 1/r$$

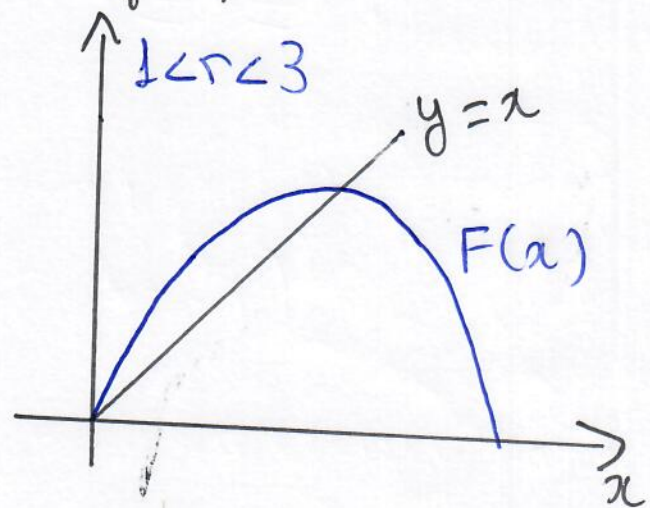
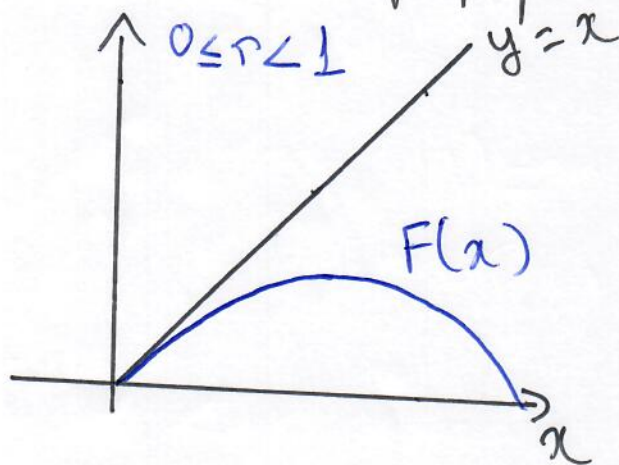
$$F'(x) = r(1 - 2x)$$

Os comportamentos do mapa logístico podem então ser resumidos como

• $0 \leq r < 1$: $X=0$ é estável assintoticamente, (5)

$F'(0) = r$, e $X = 1 - 1/r$ instável. $X=0$ é um atrator: a população não se sustenta e é dizimada.

• $1 < r < 3$: $X=0$ é instável e $X = 1 - 1/r$ é assintoticamente estável, $F'(1 - 1/r) = 2 - r$. O crescimento exponencial é estabilizado pela punição à superpopulação. Graficamente



• $3 < r \leq 4$: $X=0$ e $X = 1 - 1/r$ são ambas instáveis. Na medida em que r aumenta, aparecem sucessivas bifurcações de dobra de período

→ $3 < r < 1 + \sqrt{6}$: soluções de período 2

$X = F^{(2)}(X)$. Polinômio de grau quatro, com soluções $X=0$, $X = 1 - 1/r$, instáveis, e soluções não triviais X_1 e X_2 com $F(X_1) = X_2$ e $F(X_2) = X_1$.

⑥

$\rightarrow 1+\sqrt{6} = 3.44949... < r < 3.54409... : \text{solução}$
de período 4 $x = F^{(4)}(x)$

$\rightarrow 3.54409... < r < 3.56440... : \text{solução de período 8}$
 $x = F^{(8)}(x)$ e assim por diante

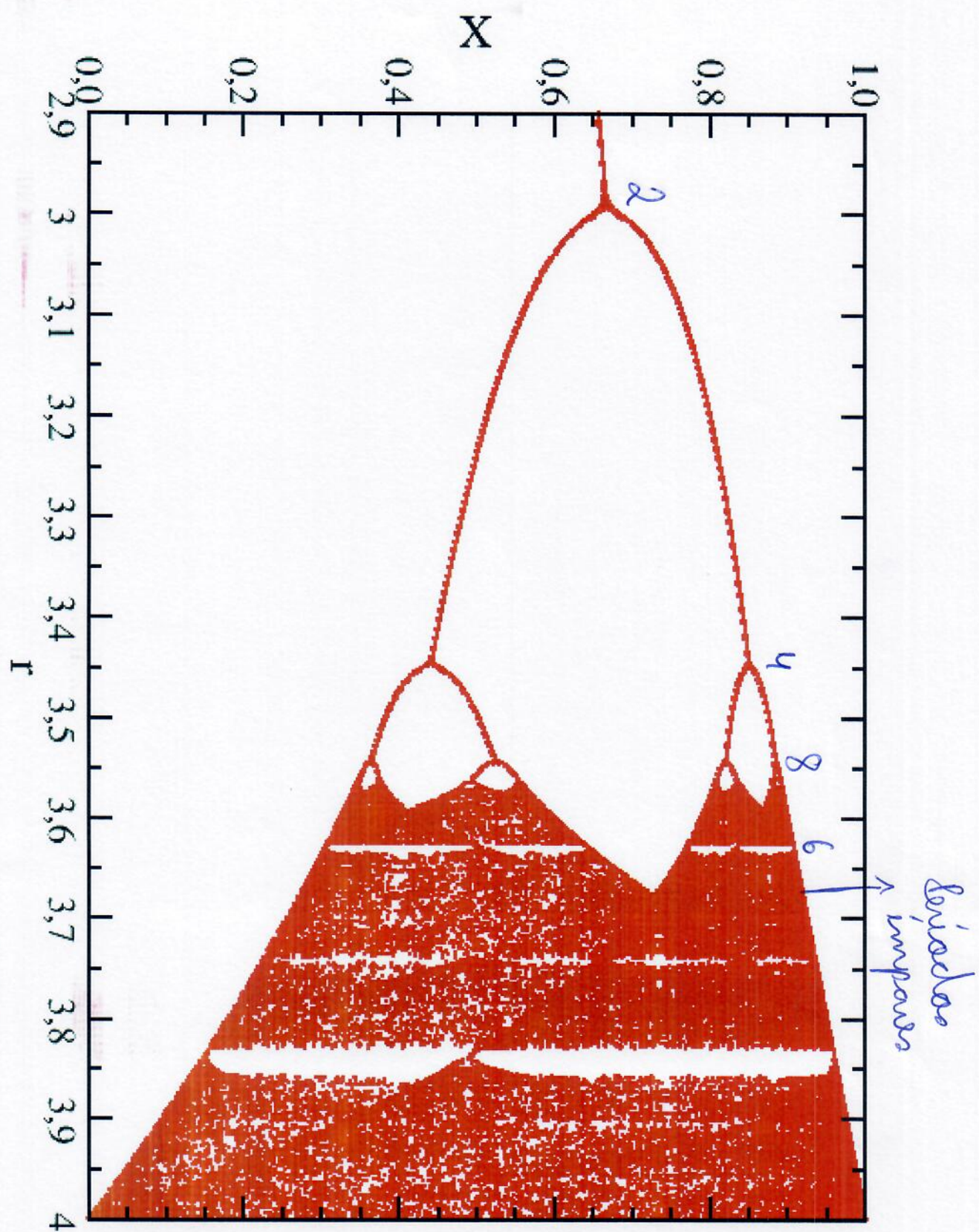
$\rightarrow r = 3.56994... : \text{limite de acumulação para}$
o ciclo com período 2^∞ .

$\rightarrow 3.56994... < r \leq 4 : \text{Região de caos determinístico.}$
Aqui, a série x_n nunca se repete para alguns
valores de r , com x_n continuamente distribuído
entre 0 e 1, de modo aparentemente aleatório.
Para outros valores de r há ciclos assintóticos
estáveis de diferentes períodos. Ciclos com período
ímpar só surgem para $r > 3.67857...$

Os atratores para esse caso são mostrados na
próxima página. Em 1975, Feigenbaum
descobriu que as dobragens de período se dão de
forma geométrica (independente do mapa) com

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_i - r_{i-1}}{r_{i+1} - r_i} = 4.66920...$$

6a



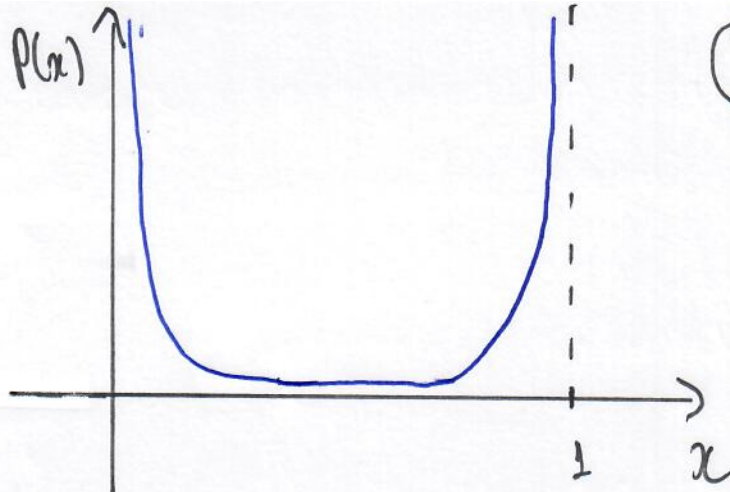
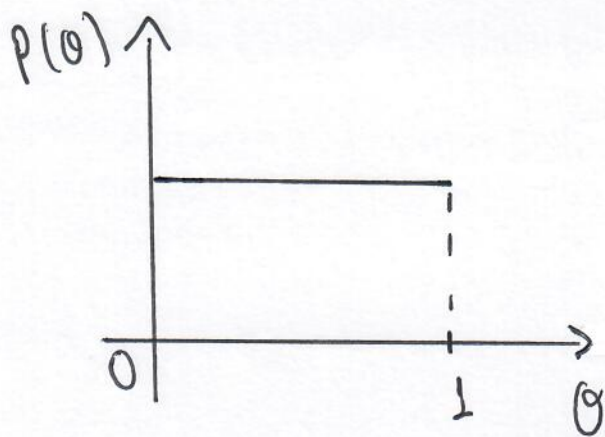
⑦
O que podemos dizer acerca dos valores de r para os quais temos uma distribuição de valores em vez de ciclos estáveis? De modo geral, esse é um problema difícil, mas é possível avançarmos para $r = 4$ com a substituição

$$x_n = \sin^2(\pi \theta_n), \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\pi \theta_{n+1}) &= 4 \sin^2(\pi \theta_n) \left[1 - \sin^2(\pi \theta_n) \right] \\ &= \left[2 \sin(\pi \theta_n) \cos(\pi \theta_n) \right]^2 \\ &= \sin^2(2\pi \theta_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta_{n+1} = 2\theta_n \text{ e assim } \theta_n = 2^n \theta_0.$$

Aque θ é periódica com período 1, no sentido que tanto θ quanto $\theta + 1$ geram o mesmo x . Assim, em cada iteração do mapa podemos desprezar a parte inteira de θ_n . Isso faz com que para a maior parte das escolhas de θ_0 (irracional), θ_n seja distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Como θ é uniforme, x não é uniforme, pois $x = \sin^2(\pi \theta)$



⑧

$P(x) = 1 / [\pi \sqrt{x(1-x)}] \rightarrow$ atrator! Distribuição de probabilidade invariante.

Baseado na discussão do mapa ^{linear}, vamos assumir duas condições iniciais próximas x_0 e $x_0 + \epsilon_0$, com $\epsilon_0 \ll 1$, e vamos escrever

$$\epsilon_n \simeq \epsilon_0 e^{\lambda n}, \lambda \rightarrow \text{expoente de Lyapunov}$$

$\lambda > 0$ (diverge), $\lambda < 0$ (converge)

Ou seja, queremos saber se a diferença inicial é amplificada ou suprimida.

Como nós temos $\epsilon_0 e^{\lambda n} = |F^{(n)}(x_0 + \epsilon_0) - F^{(n)}(x_0)|$,

podemos escrever:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{|F^{(n)}(x_0 + \epsilon_0) - F^{(n)}(x_0)|}{\epsilon_0} \right] \simeq \frac{1}{n} \ln \left[\left| \frac{d}{dx} F^{(n)}(x) \right| \right]$$

no limite $n \rightarrow \infty$ (ponto fixo)

Decisamos agora avaliar a derivada da n -ésima aplicação do mapa.

⑨

$$- n=2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F^{(2)}(x_0) &= \frac{d}{dx} F(F(x_0)) = F'(\overbrace{F(x_0)}^{x_1}) F'(x_0) \\ &= F'(x_1) F'(x_0) \end{aligned}$$

Continuando o processo é fácil ver que:

$$\frac{d}{dx} F^{(n)}(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} F'(x_i), \text{ donde}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)| \right\}$$

No nosso caso, temos $F'(x) = r(1-2x)$ e assim:

$$\bullet 0 < r < 1: \lambda = \ln r, (X=0)$$

$$\bullet 1 < r < 3: \lambda = \ln |2-r|, (X=1-\frac{1}{r})$$

$$\bullet 3 < r < 1+\sqrt{6}: \lambda = \frac{1}{2} \ln |r(1-2x_1)| + \frac{1}{2} \ln |r(1-2x_0)|,$$

o que leva a uma divergência com $r=1+\sqrt{5}$ onde $x_1 = \frac{1}{2}$

$$\bullet r=4: P(x) = 1/[\pi \sqrt{x(1-x)}] \text{ donde}$$

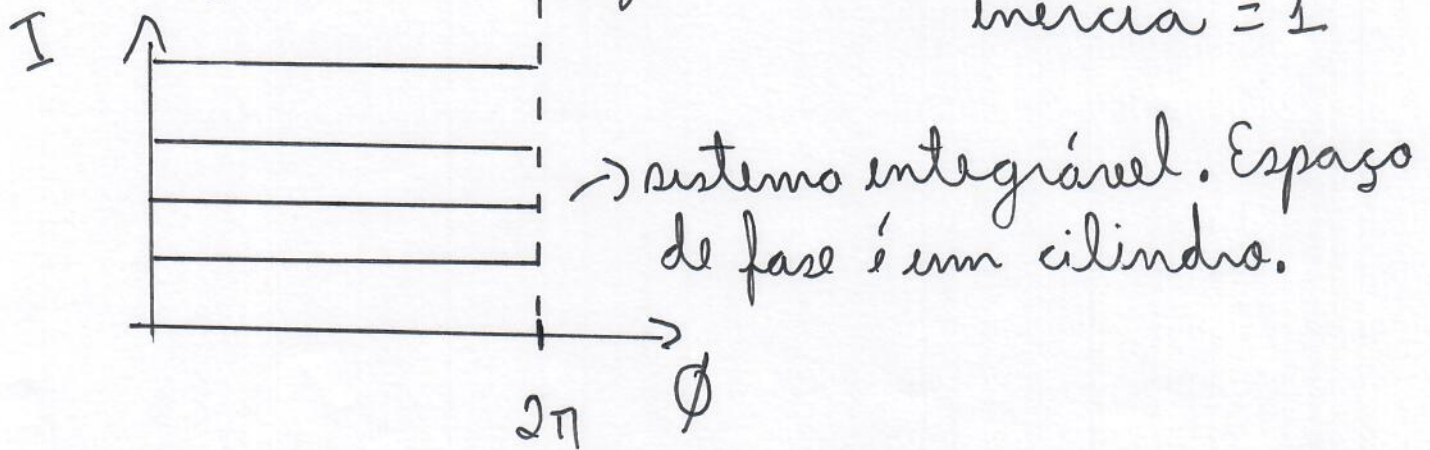
$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \ln |F'(x)| P(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln |4(1-2x)| dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = \ln 2 \\ &= 0.693147... \end{aligned}$$

- Mapa padrão

Como um exemplo de um mapa 2D, vamos ver brevemente o mapa padrão. Sua inspiração mecânica é o "rotor chutado". Quando livre, temos:

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2}, \quad \dot{\phi} = I \quad (\text{Momento de inércia } m=1)$$

$I \rightarrow$ ação, $\phi \rightarrow$ ângulo, $m \rightarrow$ momento de inércia $= 1$



Agora damos um impulso periódico (chute) ao sistema com período T e $\omega = 2\pi/T$

com $\Delta I \propto \sin \phi$ (impulso). O sistema não é mais autônomo e integrável. É conveniente estudar as variáveis de ação e ângulo após o n -ésimo chute:

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1} \\ I_{n+1} = I_n + K \sin \phi_n \end{cases} \quad \begin{matrix} \phi_n + I_n + K \sin \phi_n \\ \text{Mapa padrão} \end{matrix}$$

O parâmetro K é uma medida da não linearidade do sistema e representa também a quebra de integrabilidade. (11)

Podemos escrever esse mapa da seguinte forma mais geral

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = F[\phi_n, I_n] (= \phi_n + I_n + K \sin \phi_n) \\ I_{n+1} = G[\phi_n, I_n] (= I_n + K \sin \phi_n) \end{cases}$$

e buscamos pelos pontos fixos do mapa

$$\phi = F[\phi, I] \quad \text{e} \quad I = G[\phi, I], \text{ donde}$$

$$\begin{cases} \phi = \phi + I \Rightarrow I = 0 \\ I = I + K \sin \phi \Rightarrow \phi = 0 \text{ ou } \pi \end{cases}$$

Pontos fixos $(0,0)$ e $(\pi,0)$. Para estudarmos a estabilidade, expandimos o mapa ao redor dos pontos fixos:

$$\begin{pmatrix} \phi_{n+1} - \phi \\ I_{n+1} - I \end{pmatrix} \approx M \begin{pmatrix} \phi_n - \phi \\ I_n - I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \phi_n} & \frac{\partial F}{\partial I_n} \\ \frac{\partial G}{\partial \phi_n} & \frac{\partial G}{\partial I_n} \end{bmatrix}$$

→ avaliado no ponto fixo

(12)

Temos agora um mapa linear que vai para zero, ou seja $\phi_{n+1} = 0$ e $I_{n+1} = I$, apenas se os autovalores de M possuírem módulo menor que 1 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$.

$$M(0,0) = \begin{bmatrix} 1 + K \cos(0) & 1 \\ K \cos(0) & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - 1 - K)(\lambda - 1) - K = 0$$

$$-\lambda + 1 + K + \lambda^2 - \lambda - K\lambda - K = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(K+2) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[2 + K \pm \sqrt{K(4+K)} \right]$$

Claramente, $\lambda_+ \geq 1$ sempre e esse ponto fixo é instável

$$M(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 1 - K & 1 \\ -K & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[2 - K \pm \sqrt{K(K-4)} \right]$$

Se $K > 4$, temos que $|\lambda_-| > 1$ e esse ponto é instável

Para $0 < K < 4$ $\lambda_{\pm} = 1 - K/2 \pm i\sqrt{K(4-K)}/2$ e temos

$$|\lambda_{\pm}|^2 = 1 + K^2/4 - K - K^2/4 + K = 1$$

Embora esse seja um caso limítrofe, esse ponto é estável. O jeito mais simples de vermos isso é por meio da solução numérica. Veja no notebook do Mathematica em anexo