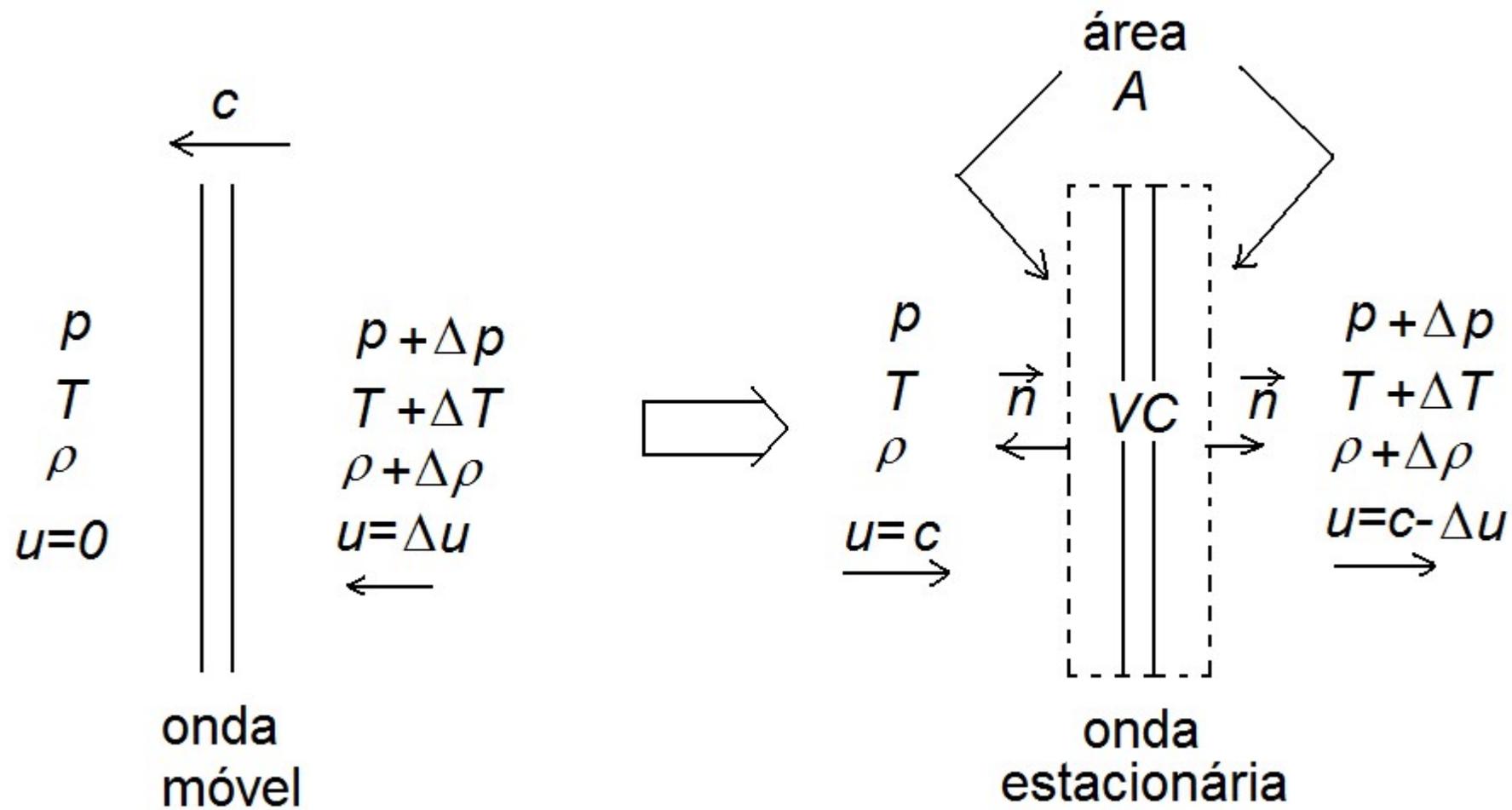


Escoamentos Compressíveis

1) Velocidade do Som

Segundo White (2010), é a taxa de propagação de um pulso de pressão infinitesimal em um fluido em repouso. Na figura, um pulso depressão de intensidade finita move-se para a esquerda com velocidade c em direção ao fluido em repouso, de propriedades $p, \rho, T, u=0$, deixando para trás fluido com propriedades perturbadas $p+\Delta p, \rho+\Delta\rho, T+\Delta T, \Delta u$. O fluido perturbado segue a onda para a esquerda com velocidade $\Delta u \ll c$. Vamos adotar um VC que se move com a velocidade c da onda:



Da continuidade, para regime permanente:

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \int_{VC} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} dV = 0 \Rightarrow \int_{SC} \rho u_j n_j dA = 0 \quad (1.1)$$

Isso resulta:

$$(\rho + \Delta\rho)(c - \Delta u)A - \rho c A = 0 \Rightarrow (\rho + \Delta\rho)(c - \Delta u) = \rho c \quad (1.2)$$

Que, por sua vez, resulta:

$$\Delta u = \frac{c \Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} \quad (1.3)$$

Da quantidade de movimento (Equação de Euler, na forma Conservativa para regime permanente):

$$\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

Integrando no volume de controle:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} dV = - \int_{VC} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \Rightarrow \int_{SC} u_i \rho u_j n_j dA = - \int_{SC} p n_i dA \quad (1.5)$$

Isso resulta:

$$(c - \Delta u)\vec{i} (\rho + \Delta\rho)(c - \Delta u)A + c\vec{i} \rho(-c)A = -(p + \Delta p)\vec{i} A - p(-\vec{i}) A \quad (1.6)$$

Que resulta:

$$\underbrace{(\rho + \Delta\rho)(c - \Delta u)(c - \Delta u)}_{=\rho c} - \rho c^2 = -\Delta p \quad (1.7)$$

A igualdade é devida à continuidade, equação (1.2). Isso resulta:

$$\Delta p = \rho c \Delta u \quad (1.8)$$

Aplicando a equação (1.3) na equação (1.8):

$$\Delta p = \rho c \frac{c \Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \quad (1.9)$$

Isso resulta:

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad (1.10)$$

Para um pulso infinitesimal ($\Delta \rho \rightarrow 0$):

$$a^2 = c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (1.11)$$

Onde a é a velocidade do som.

Como não consideramos gradientes de temperatura relacionados com fluxos de calor (exceto na própria onda) e não consideramos atrito viscoso, temos um processo isentrópico:

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} \quad (1.12)$$

Para um gás perfeito, num processo isentrópico:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad \text{com} \quad k = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.13)$$

Temos:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \text{const.} \cdot k \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k} \cdot k \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho} \quad (1.14)$$

Assim, para um gás perfeito, a velocidade do som resulta:

$$\boxed{a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}} \quad , \text{ onde } R \text{ é a constante do gás} \quad (1.15)$$

2) Limite de N° de Mach para escoamento incompressível

Segundo White (2010), se observarmos a variação da velocidade e massa específica ao longo de uma linha de corrente, para um escoamento incompressível:

$$d(\rho u) = u d\rho + \rho du \approx \rho du \quad (2.1)$$

Isso significa que:

$$|u d\rho| \ll |\rho du| \quad (2.2)$$

Logo:

$$\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| \ll \left| \frac{du}{u} \right| \quad (2.3)$$

Mas, da velocidade do som:

$$dp \cong a^2 d\rho \quad (2.4)$$

Aplicando esse resultado em (2.3):

$$\left| \frac{dp}{\rho a^2} \right| \ll \left| \frac{du}{u} \right| \quad (2.5)$$

Mas da equação de Bernoulli para um escoamento incompressível sobre uma linha de corrente:

$$\rho \frac{u^2}{2} + p = C \Rightarrow \rho u du + dp = 0 \Rightarrow dp = -\rho u du \quad (2.6)$$

Aplicando esse resultado em (2.5):

$$\left| \frac{\rho u du}{\rho a^2} \right| \ll \left| \frac{du}{u} \right| \Rightarrow \left(\frac{u}{a} \right)^2 \ll 1 \Rightarrow Ma^2 \ll 1 \quad (2.7)$$

Desse resultado, para termos uma ordem de grandeza a menos no valor do quadrado do n° de Mach:

$$\boxed{Ma = \frac{u}{a} < 0,3} \quad (2.8)$$

3) Equação da Energia para um Escoamento Adiabático

A equação da energia total é:

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V \rho u_k g_k dV + \int_S u_k \sigma_{jk} n_j dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j dA \quad (3.1)$$

Se o escoamento for adiabático (sem fluxos de calor):

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j dA = 0 \quad (3.2)$$

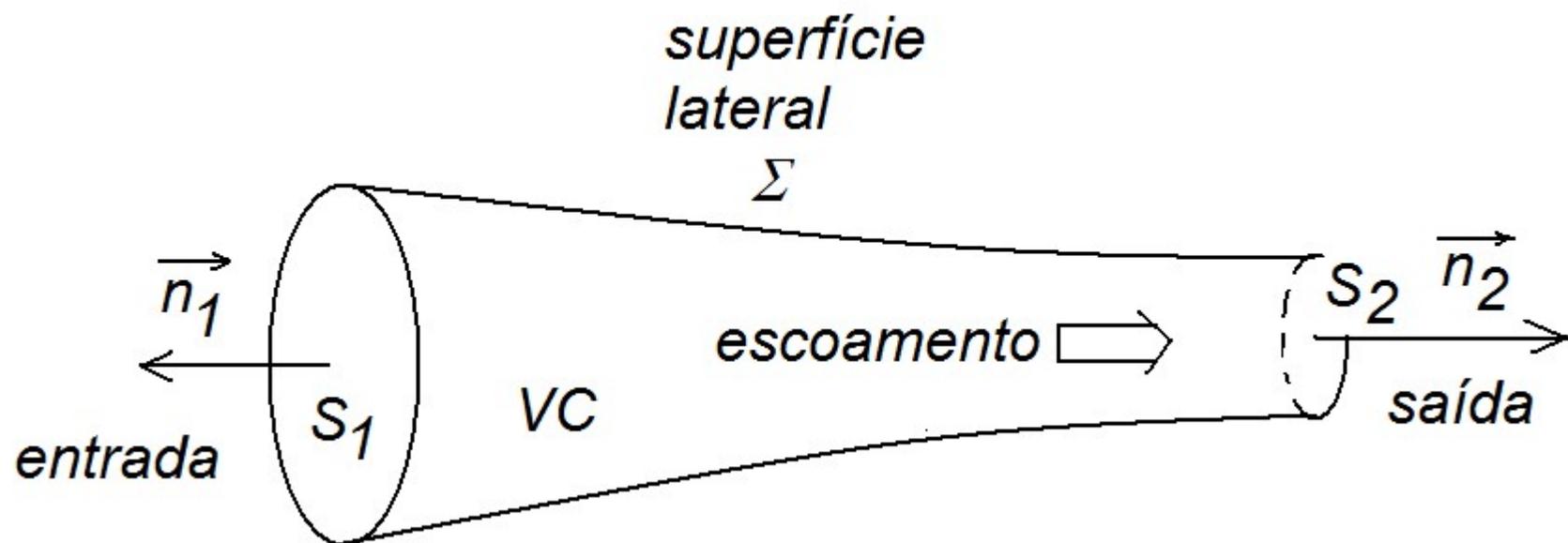
Se considerarmos que temos regime permanente:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}}_0 + \frac{\partial(\rho u_j e)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho u_j e)}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

Se também ignorarmos efeitos de forças de campo, a equação (3.1) de energia fica:

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_j e)}{\partial x_j} dV = \int_S u_k \sigma_{jk} n_j dA \Rightarrow \int_S e \rho u_j n_j dA = \int_S u_k \sigma_{jk} n_j dA \quad (3.4)$$

No cálculo da potência das forças de contato, vamos fazer a seguinte consideração:



Consideremos que o Volume de Controle VC é um tubo de corrente. Se a superfície lateral Σ for uma parede fixa, a velocidade será nula e a potência das forças de contato (que envolve a potência das tensões viscosas) sobre a parede será também nula. Como em geral podemos desprezar a potência devida às forças viscosas nas superfícies de entrada e saída (os gradientes de velocidade são muito menores do que aqueles existentes junto às paredes) temos que a potência das forças de contato, para um escoamento adiabático com irreversibilidades, é praticamente apenas relacionada com a potência das forças de pressão nas entradas e saídas, e a equação (3.4) resulta:

$$\int_S e \rho u_j n_j dA = \int_S u_k (-\delta_{jk} p) n_j dA \quad (3.5)$$

Por outro lado, se o escoamento for adiabático reversível (isentrópico), não temos atrito viscoso e o tensor das tensões fica simplesmente $\sigma_{jk} = -\delta_{jk} p$, com a equação da energia resultando também igual à equação (3.5). Assim, a equação (3.5) é válida tanto para um escoamento adiabático com irreversibilidades quanto para um escoamento adiabático reversível (isentrópico).

Como o tensor Delta de Kronecker δ_{jk} só é diferente de 0 para $j=k$, temos que $u_k \delta_{jk} = u_j$, e a equação (3.5) fica:

$$\int_S e \rho u_j n_j dA = - \int_S \frac{p}{\rho} \rho u_j n_j dA \quad (3.6)$$

Lembrando que a energia total é a soma da energia interna \hat{u} com a energia cinética $u^2/2$:

$$\int_S \left(\frac{u^2}{2} + \hat{u} + \frac{p}{\rho} \right) \rho u_j n_j dA = 0 \quad (3.7)$$

Lembrando agora que a entalpia é dada por $h = \hat{u} + p / \rho$:

$$\int_S \left(\frac{u^2}{2} + h \right) \rho u_j n_j dA = 0 \quad (3.8)$$

Como o produto escalar $u_j n_j$ é nulo sobre a superfície Σ pois esta é a superfície lateral de um tubo de corrente ou de um conduto, temos fluxo de massa não nulo apenas nas superfícies de entrada S_1 e saída S_2 :

$$\rho_2 u_2 S_2 \left(\frac{u_2^2}{2} + h_2 \right) - \rho_1 u_1 S_1 \left(\frac{u_1^2}{2} + h_1 \right) = 0 \quad (3.9)$$

Como, pela continuidade, $\rho_2 u_2 S_2 = \rho_1 u_1 S_1 = \dot{m}$ (vazão em massa), temos:

$$\frac{u_2^2}{2} + h_2 = \frac{u_1^2}{2} + h_1 \quad (3.10)$$

Ou ainda:

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + h = h_0} \text{ que é uma constante, a Entalpia de Estagnação} \quad (3.11)$$

Para um gás perfeito:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = c_p T_0 \Rightarrow 1 + \frac{u^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T} \quad (3.12)$$

Onde T_0 é a temperatura de estagnação. Lembrando que, para um gás perfeito:

$$c_p - c_v = R; \frac{c_p}{c_v} = k \Rightarrow c_p = \frac{k R}{k - 1} \quad (3.13)$$

Temos, da equação (3.12):

$$1 + \frac{u^2}{2kRT}(k-1) = \frac{T_0}{T} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{u^2}{2a^2}(k-1) = \frac{T_0}{T} \quad (3.14)$$

E, finalmente:

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} Ma^2} \quad (3.15)$$

Dessa última equação temos:

$$\frac{a_0}{a} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} Ma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

As últimas equações valem para um processo adiabático reversível ou irreversível. Para um processo adiabático reversível (isentrópico):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad (3.17)$$

E, aplicando na equação (3.15):

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} Ma^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.18)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} Ma^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (3.19)$$

Essas duas últimas expressões são válidas para escoamentos isentrópicos.

4) Relação entre Equação de Bernoulli e Equação da Energia para Processo Isentrópico

A equação de Bernoulli para o escoamento permanente e barotrópico de um fluido ideal, válida para uma linha de corrente, é dada por:

$$\frac{u^2}{2} + f = C \quad \text{onde} \quad f = \int \frac{1}{\rho} dp \quad (4.1)$$

Podemos dizer, a respeito da função f , que:

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{\rho} \quad (4.2)$$

Verificando a variação das parcelas da Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente:

$$d\left(\frac{u^2}{2} + f\right) = 0 \Rightarrow u \, du + df = 0 \quad (4.3)$$

Isso resulta:

$$\boxed{u \, du + \frac{1}{\rho} \, dp = 0} \quad (4.4)$$

Mas, da Termodinâmica, temos que a variação de entropia é dada por:

$$\boxed{T ds = dh - \frac{dp}{\rho}} \quad (4.5)$$

Num processo isentrópico:

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (4.6)$$

Substituindo na equação (4.4):

$$u du + dh = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u^2}{2} + h\right) = 0 \Rightarrow \frac{u^2}{2} + h = h_0 \quad (4.7)$$

Assim, da equação de Bernoulli, com a hipótese de escoamento isentrópico, recuperamos a equação da energia.

Outra forma de verificar a equivalência entre a equação de energia e a equação de Bernoulli é obter a função f . Da equação (4.1), para escoamento isentrópico:

$$f = \int \frac{1}{\rho} dp \quad \text{com} \quad \frac{p}{\rho^k} = C_1 \quad (4.8)$$

Logo:

$$f = \int \left(\frac{C_1}{p} \right)^{\frac{1}{k}} dp = C_1^{1/k} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p}{\rho^k} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \quad (4.9)$$

Assim, a equação de Bernoulli, para um escoamento isentrópico, fica:

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = C} \quad (4.10)$$

Mas, da equação (3.13):

$$\frac{c_p}{R} = \frac{k}{k-1} \quad (4.11)$$

E, para um gás perfeito:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4.12)$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.10):

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = C \Rightarrow \frac{u^2}{2} + h = h_0 \quad (4.13)$$

E verificamos mais uma vez que da equação de Bernoulli, para um escoamento isentrópico, resulta a equação da Energia.

5) Valores Críticos no Ponto Sônico

Condições de escoamento sônico ($Ma=1$) são chamadas de condições críticas: p^* , ρ^* , T^* , a^* . Das equações (3.15), (3.16), (3.18) e (3.19):

$$\boxed{\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}} \quad (5.1)$$

$$\boxed{\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.2)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (5.4)$$

Note que, como só as equações (3.18) e (3.19) para a pressão e para a massa específica de estagnação foram obtidas com a hipótese de escoamento isentrópico, isso significa que para um escoamento adiabático reversível (isentrópico) todas as propriedades críticas são constantes, mas para um escoamento adiabático com irreversibilidades apenas a^* e T^* são constantes. Nesse último caso, p^* e ρ^* variam.

A velocidade crítica é dada por:

$$u^* = a^* = \sqrt{kRT^*} \quad (5.5)$$

E, da expressão (5.1):

$$u^* = \left(\frac{2k}{k+1} RT_0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

6) Escoamentos Isentrópicos com Variação de Área

Da equação da continuidade, temos que a vazão em massa é constante ao longo de um conduto de área variável em que temos um escoamento permanente.

$$\rho u A = \dot{m} = \text{constante} \quad (6.1)$$

Temos portanto que a variação da vazão em massa ao longo do conduto é nula:

$$d(\rho u A) = 0 \quad (6.2)$$

Isso resulta:

$$u A d\rho + \rho d(u A) = 0 \quad (6.3)$$

$$u A d\rho + \rho A du + \rho u dA = 0 \quad (6.4)$$

$$\rho u A \frac{d\rho}{\rho} + \rho u A \frac{du}{u} + \rho u A \frac{dA}{A} = 0 \quad (6.5)$$

E, finalmente:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0} \quad (6.6)$$

Segundo White (2010), lembrando agora que, da equação (4.4) de Bernoulli:

$$u \, du + \frac{1}{\rho} \, dp = 0 \quad (6.7)$$

E que:

$$dp = a^2 \, d\rho \quad (6.8)$$

De (6.8) em (6.7):

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{u \, du}{a^2} \quad (6.9)$$

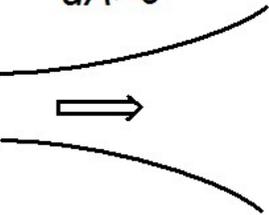
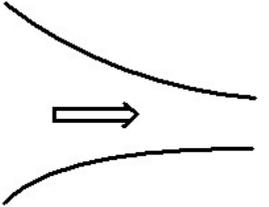
Aplicando (6.9) em (6.6):

$$-\frac{u}{a^2} \frac{du}{u^2} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (6.10)$$

Que resulta (Equação de Hugoniot):

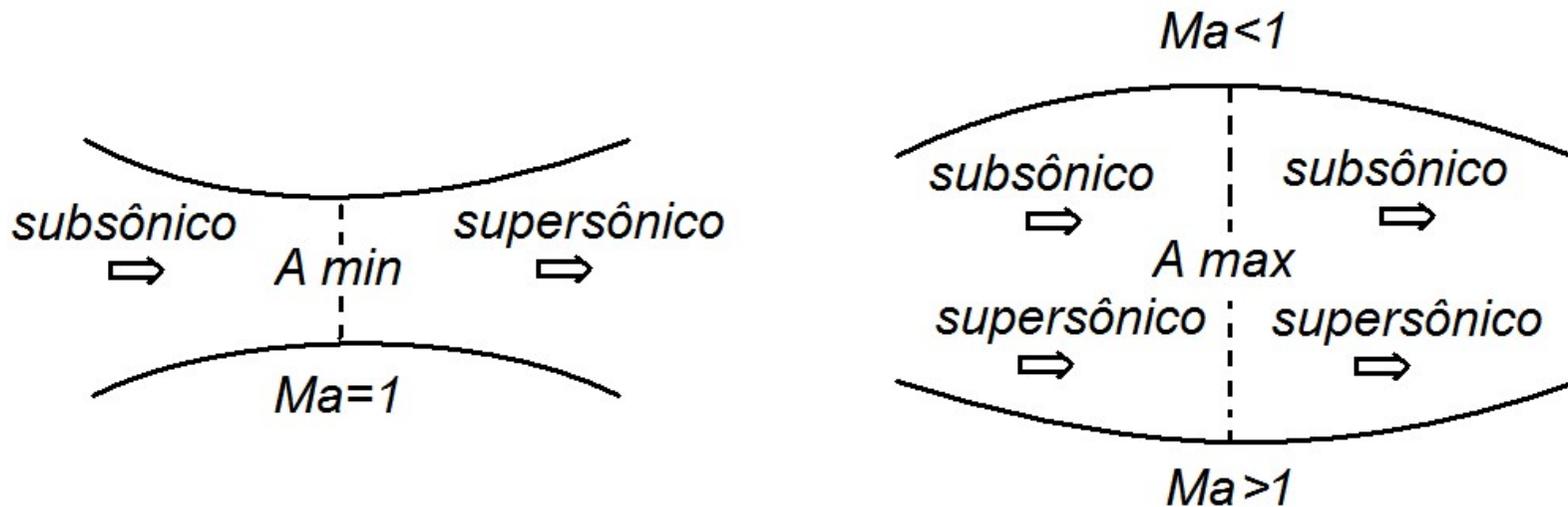
$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{1}{Ma^2 - 1} \frac{dA}{A}} \quad (6.11)$$

Esta última equação demonstra que escoamentos supersônicos tem um comportamento diferente de escoamentos subsônicos quando temos variação de área. A figura abaixo, adaptada de White (2010) ilustra essas diferenças.

	<i>Subsônico $Ma < 1$</i>	<i>Supersônico $Ma > 1$</i>
$dA > 0$ 	$du < 0$ $dp > 0$ <i>difusor subsônico</i>	$du > 0$ $dp < 0$ <i>bocal supersônico</i>
$dA < 0$ 	$du > 0$ $dp < 0$ <i>bocal subsônico</i>	$du < 0$ $dp > 0$ <i>difusor supersônico</i>

Segundo White (2010), a inspeção da equação (6.11) demonstra que, no ponto sônico ($Ma=1$), para termos du finito, dA tem que ser nulo ($dA=0$), ou seja, temos uma seção de área mínima (garganta) ou máxima.

No entanto, apenas uma seção convergente-divergente pode acelerar um escoamento de subsônico para sônico e supersônico. Numa seção divergente-convergente, o Ma na seção de área máxima se afasta de $Ma=1$ em qualquer situação.



7) Relações para Gás Perfeito nos Escoamentos com Variação de Área; Blocagem

Da continuidade, no ponto sônico:

$$\rho u A = \rho^* u^* A^* \Rightarrow \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* u^*}{\rho u} \quad (7.1)$$

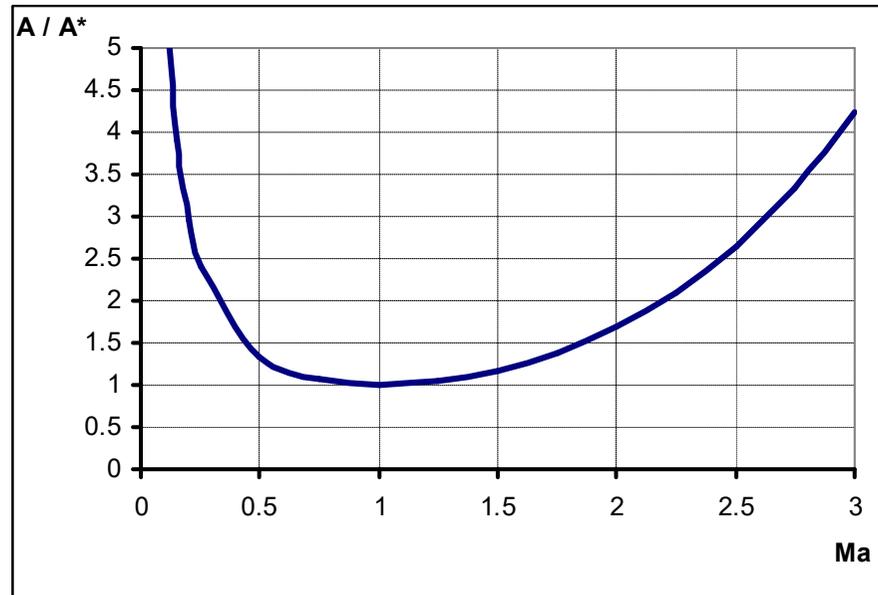
Das equações (3.15), (3.19), (5.1), (5.4) e (5.5):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)Ma^2}{\frac{1}{2}(k+1)} \right]^{\frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k-1} \right)} \quad (7.2)$$

Para o ar ($k=1,4$):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{1 + 0,2 Ma^2}{1,728} \right]^3 \quad (7.3)$$

Plotando:



Do gráfico, se percebe que a área mínima que pode ocorrer em um escoamento isentrópico em um duto é a área da garganta sônica. Todas as outras seções do duto devem ter uma área A maior que A^* .

Outro fenômeno observado é o que chamamos de bloqueio. Da equação (7.1):

$$\frac{\rho u}{\rho^* u^*} = \frac{A^*}{A} \quad (7.4)$$

Do lado esquerdo, temos a vazão em massa por unidade de área adimensionalizada pelas condições críticas. Do lado direito, temos uma quantidade que é sempre menor que a unidade. Assim, chega-se à conclusão que a máxima vazão em massa que pode passar por um duto é aquela que temos quando a garganta está em condição crítica ou sônica. O duto é dito “bloqueado”.

De acordo com White (2010), não podemos transportar vazão em massa adicional a menos que a garganta seja alargada. Se a garganta for contraída, a vazão em massa irá decrescer.

A máxima vazão em massa é:

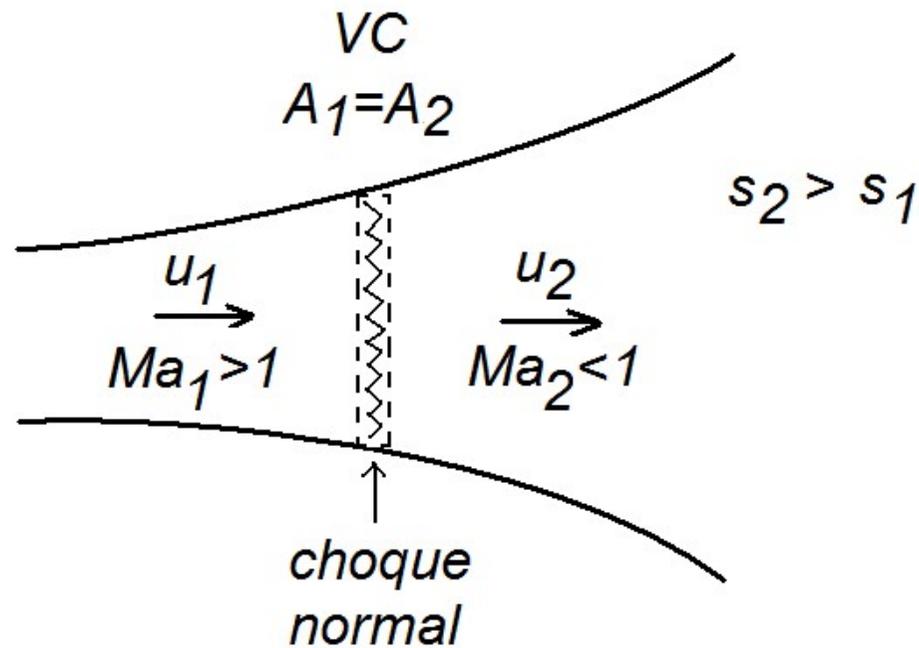
$$\dot{m}_{\max} = \rho^* u^* A^* \quad (7.5)$$

Que resulta:

$$\dot{m}_{\max} = k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1}} A^* \rho_0 (RT_0)^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

8)Onda de Choque Normal

A onda de choque normal é uma irreversibilidade que ocorre em escoamentos supersônicos internos e externos, e que está relacionada com descontinuidades das propriedades do escoamento.



De acordo com White (2010), assumindo um volume de controle fino ao redor do choque, de forma que $A_1=A_2$, temos que:

$$\text{Conservação da massa: } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (8.1)$$

$$\text{Quantidade de Movimento: } p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 \quad (8.2)$$

$$\text{Energia (escoamento adiabático): } h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = h_0 \quad (8.3)$$

$$\text{Gás perfeito: } \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} \quad (8.4)$$

$$\text{Entalpia: } h = c_p T = \frac{k p}{[(k-1)\rho]} \quad (8.5)$$

Assumindo que são conhecidas as condições $p_1, \rho_1, u_1, h_1, T_1$, queremos determinar $p_2, \rho_2, u_2, h_2, T_2$. Devido ao termo quadrático da velocidade na equação da Quantidade de Movimento, temos duas soluções. A solução final é obtida da condição de que a entropia aumenta devido ao choque: $s_2 > s_1$.

Combinando (8.1), (8.2) e (8.3) obtemos a relação de Rankine-Hugoniot:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (8.6)$$

Usando a eq. (8.5):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta \frac{p_2}{p_1}}{\beta + \frac{p_2}{p_1}} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{k + 1}{k - 1} \quad (8.7)$$

É interessante comparar os resultados da eq. (8.7) com os resultados obtidos para escoamento isentrópico, $\rho_2 / \rho_1 = (p_2 / p_1)^{1/k}$.

A variação de entropia é obtida por:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] \quad (8.8)$$

Em White (2010) encontramos um estudo dos resultados para $k=1,4$ (ar) e $p_2/p_1 < 2$.

p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	ρ_2/ρ_1 isentrópico	$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$
0,5	0,6154	0,6095	-0,0314
0,9	0,9275	0,9275	-0,0005
1,0	1,0	1,0	0
1,1	1,00704	1,00705	0,00004
1,5	1,3333	1,3359	0,0027
2,0	1,6250	1,6407	0,0134

A variação negativa de entropia para $p_2 < p_1$ viola a 2ª Lei da Termodinâmica, o que significa que é impossível um choque de rarefação em um gás perfeito. Choques fracos ($p_2/p_1 < 2$) são quase isentrópicos.

Ainda seguindo White (2010), das eqs. (8.1) a (8.5) temos que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1} \left[\frac{2\rho_1 u_1^2}{p_1} - (k-1) \right] \quad (8.9)$$

Mas, para um gás perfeito:

$$\rho_1 \frac{u_1^2}{p_1} = k \frac{u_1^2}{kRT_1} = k Ma_1^2 \quad (8.10)$$

E assim, se obtém:

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1} \left[2k Ma_1^2 - (k-1) \right]} \quad (8.11)$$

Dessa última equação, vemos que $p_2 > p_1$ apenas se $Ma_1 > 1$, o que significa que o escoamento à montante do choque tem que ser supersônico para satisfazer a 2ª Lei da Termodinâmica.

Quanto ao Ma_2 , ou seja, à jusante do choque, a equação da Quantidade de Movimento pode ser reescrita, para um gás perfeito, como:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k Ma_1^2}{1 + k Ma_2^2} \quad (8.12)$$

Das equações (8.11) e (8.12):

$$\boxed{Ma_2^2 = \frac{(k-1)Ma_1^2 + 2}{2k Ma_1^2 - (k-1)}} \quad (8.13)$$

Se $Ma_1 > 1$, a equação (8.13) prediz um $Ma_2 < 1$ para qualquer valor de k .

Assim, uma onda de choque normal sempre desacelera um escoamento de condições supersônicas para subsônicas.

Relações adicionais que valem para um choque normal:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)Ma_1^2}{(k-1)Ma_1^2 + 2} = \frac{u_1}{u_2} \quad (8.14)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (k-1)Ma_1^2 \right] \frac{2k Ma_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2 Ma_1^2} \quad (8.15)$$

$$T_{01} = T_{02} \quad (8.16)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(k+1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_1^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{k+1}{2k Ma_1^2 - (k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (8.17)$$

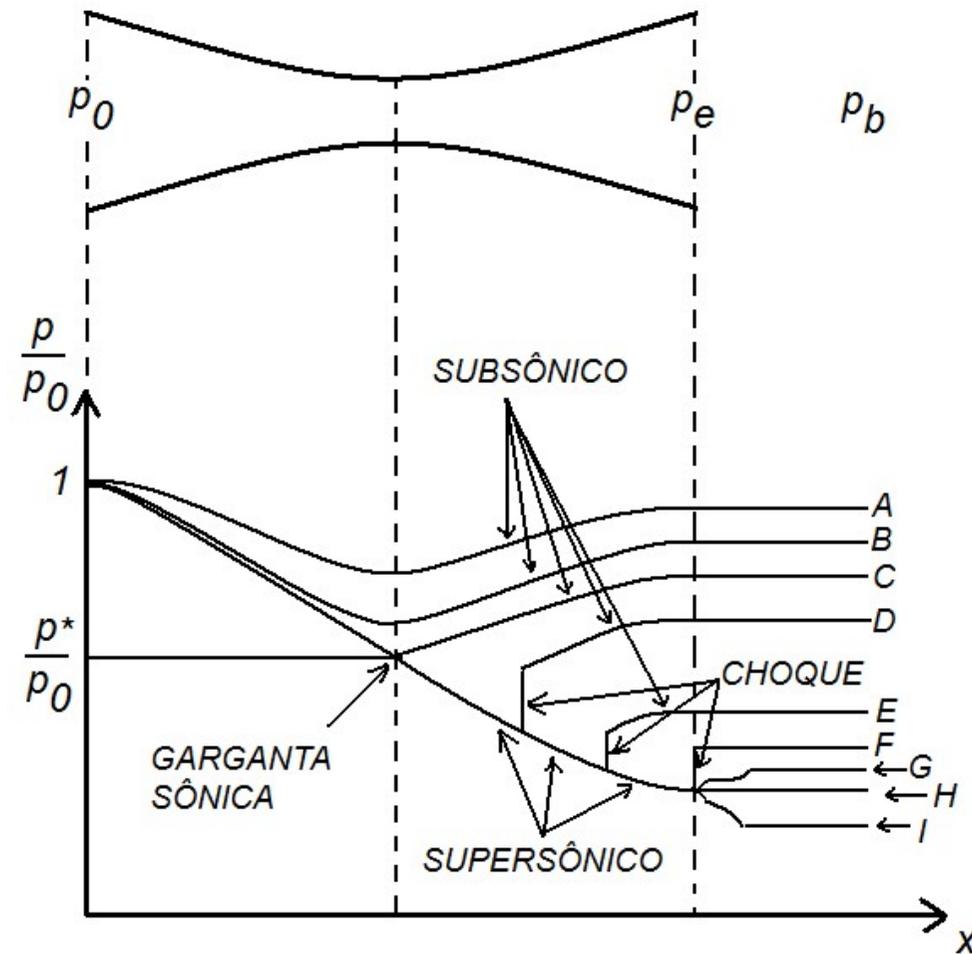
Ocorre um aumento da área crítica:

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[\frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1}} \quad (8.18)$$

De acordo com White (2010), podemos fazer o seguinte sumário:

- a) O escoamento à montante do choque normal é supersônico e à jusante é subsônico;
- b) Para gases perfeitos (e, em geral, para gases reais) choques de rarefação são impossíveis, o choque normal é sempre de compressão;
- c) A entropia aumenta, com diminuição da pressões a massas específicas de estagnação e aumento da área sônica;
- d) Choques fracos são quase isentrópicos.

9) Operação de um Bocal Convergente-Divergente



Na figura acima, adaptada de White (2010), vemos a distribuição de pressões ao longo de um bocal convergente-divergente que possui uma pressão p_e na saída e uma pressão p_b no reservatório à jusante do bocal. Segundo White(2010):

- Nos casos A e B, temos comportamento de tubo de Venturi.
- No caso C, a área da garganta iguala a área crítica para um Mach na saída Ma_e subsônico. Todo o escoamento no divergente é subsônico, incluindo o jato na saída.
- No caso H, a área da garganta iguala a área crítica para um Mach na saída Ma_e supersônico. Todo o escoamento no divergente é supersônico, incluindo o jato na saída. A pressão p_b é a pressão de operação para um túnel de vento supersônico.

- Nos casos D, E e F temos um choque normal caminhando ao longo do divergente até a seção de saída. O escoamento é supersônico antes do choque e subsônico depois.
- No caso G temos choques oblíquos fora do bocal comprimindo o escoamento.
- No caso I, a pressão p_b é menor que no caso H, mas a garganta bloqueada impede um aumento de vazão. O escoamento no jato se expande através de ondas supersônicas até a pressão atingir o valor p_b .

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.