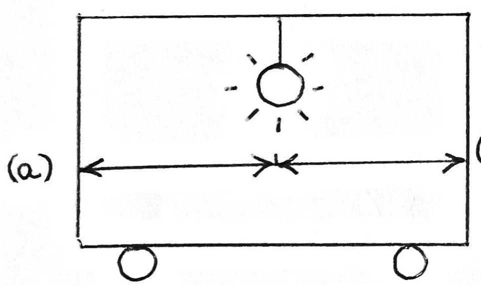
Relatividade Restrita

Como consequências diretas dos postulados da RR, temos

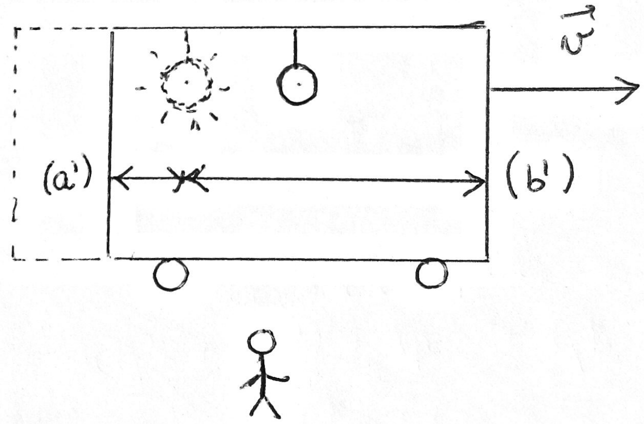
* Relatividade da simultaneidade

"Dois eventos que são simultâneos em um referencial inercial não são, em geral, simultâneos em outro."



Referencial de repouso do trem

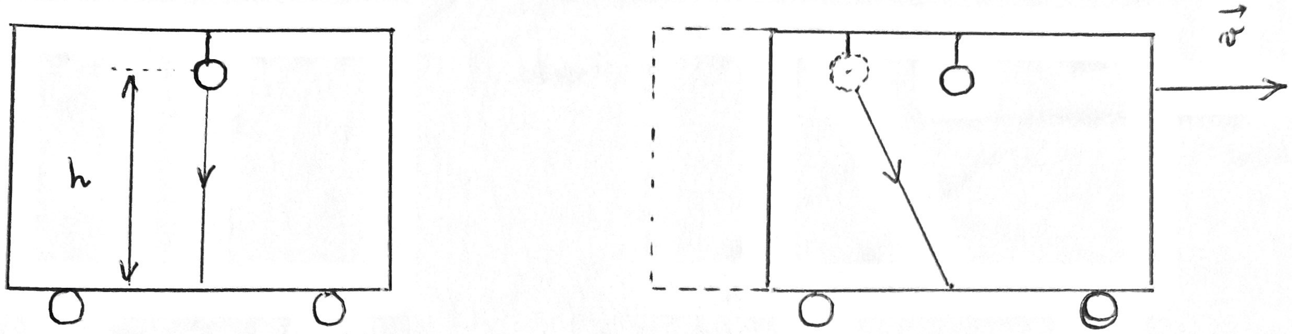
(a) e (b) são simultâneos



Referencial de repouso do observador na estação

(a') e (b') não são simultâneos

* Dilatação temporal



$$\Delta\tau = \frac{h}{c}$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta t = \frac{h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\,\Delta\tau$$

" Relógios em movimento marcam o tempo mais devagar "

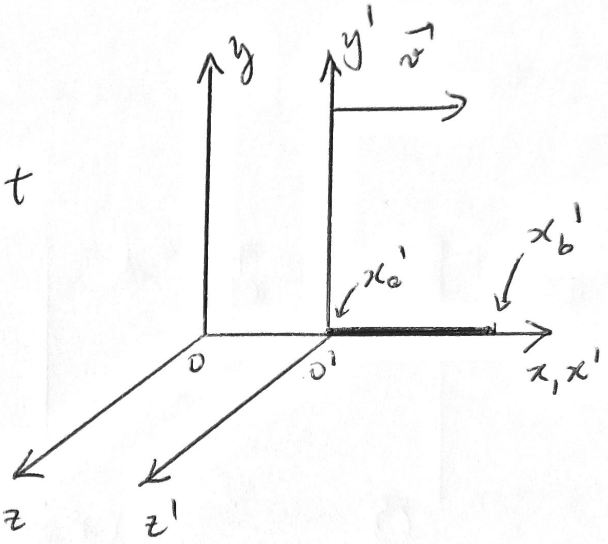
* Contração de Lorentz

" Objetos em movimento são mais curtos do que em repouso "

$$x_a' = \gamma(x_a - vt)$$

mesmo instante t em S

$$x_b' = \gamma(x_b - vt)$$



$$\Downarrow$$

$$x_a' - x_b' = \gamma(x_a - x_b)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Notação

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

3-vetor ($\mathbb{R}^3$) $\longrightarrow$ 4-vetor (Minkowski)

$$(x, y, z) \longrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

É possível introduzir um produto escalar no espaço de Minkowski que seja invariante sob transformações de Lorentz:

Sejam a^μ e b^μ dois quadrivetores no espaço de Minkowski. O produto escalar de a com b é dado por

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Prove que se a^μ e b^μ se transformam de acordo com

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \quad \text{e} \quad b'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu$$

então $a^\mu b_\mu$ é um invariante.

Uma outra forma de encarar a definição de produto escalar anterior é que ele envolve dois tipos diferentes de quadrivetores

$$\underbrace{a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)}_{\text{4-vetor contravariante}} \quad e \quad \underbrace{b_\mu = (-b^0, b^1, b^2, b^3)}_{\text{4-vetor covariante}}$$

Pergunta: Se a^μ se transforma de acordo com

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu ,$$

como se transforma a_μ?

$$a'^\mu a'_\mu = \sum_\mu a'^\mu a'_\mu = a^\mu a_\mu = \sum_\mu a^\mu a_\mu$$

$$\sum_\mu \left(\sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \right) \left(\sum_\alpha \tilde{\Lambda}_\mu{}^\alpha a_\alpha \right) = \sum_\mu \sum_\nu a^\mu \delta_\mu{}^\nu a_\nu$$

$$\sum_\alpha \sum_\nu \left(\sum_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\Lambda}_\mu{}^\alpha \right) a^\nu a_\alpha = \sum_\mu \sum_\nu \delta_\mu{}^\nu a^\mu a_\nu$$

No termo da direita, fazendo as trocas de índices de soma

$$\nu \longrightarrow \alpha \quad e \quad \mu \longrightarrow \nu$$

temos

$$\sum_{\alpha} \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\alpha} \right) a^{\nu} a_{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\nu} \delta^{\alpha}_{\nu} a^{\nu} a_{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu} \Rightarrow \tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1}$$

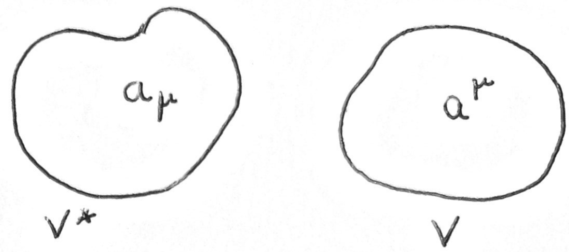
Então

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} \Rightarrow a'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu} a_{\nu} \quad \text{com } \tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1}$$

Em linguagem de Álgebra Linear, $\{a^{\mu}\}$ e $\{a_{\mu}\}$ formam espaços vetoriais. Sendo assim, $\{a_{\mu}\}$ tem todas as características algébricas do <u>espaço dual</u> de $\{a^{\mu}\}$, já que o produto escalar visto anteriormente pode ser visto como um mapeamento linear de $\{a^{\mu}\}$ em $\mathbb{R}$

Mais precisamente, se $V = \{a^\mu\}$ é o espaço vetorial formado por vetores contravariantes a^μ, então $V^* = \{a_\mu\}$ formado pelo conjunto de vetores covariantes vistos como mapas lineares $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\varphi : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
a^\mu &\longmapsto a^\mu a_\mu
\end{aligned}
$$



Qualquer quantidade que pode ser escrita na forma de um produto escalar entre quadrivetores é chamado de invariante (ou escalar) de Lorentz, já que ela não muda quando se vai de um referencial inercial a outro via transformações de Lorentz.

—— // ——

Sejam 2 eventos no espaço-tempo de Minkowski

$$x_A^\mu = (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$$

$$x_B^\mu = (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$$

O quadrivetor deslocamento é dado por

$$\Delta x^\mu = x_A^\mu - x_B^\mu$$

O intervalo entre esses eventos é definido como

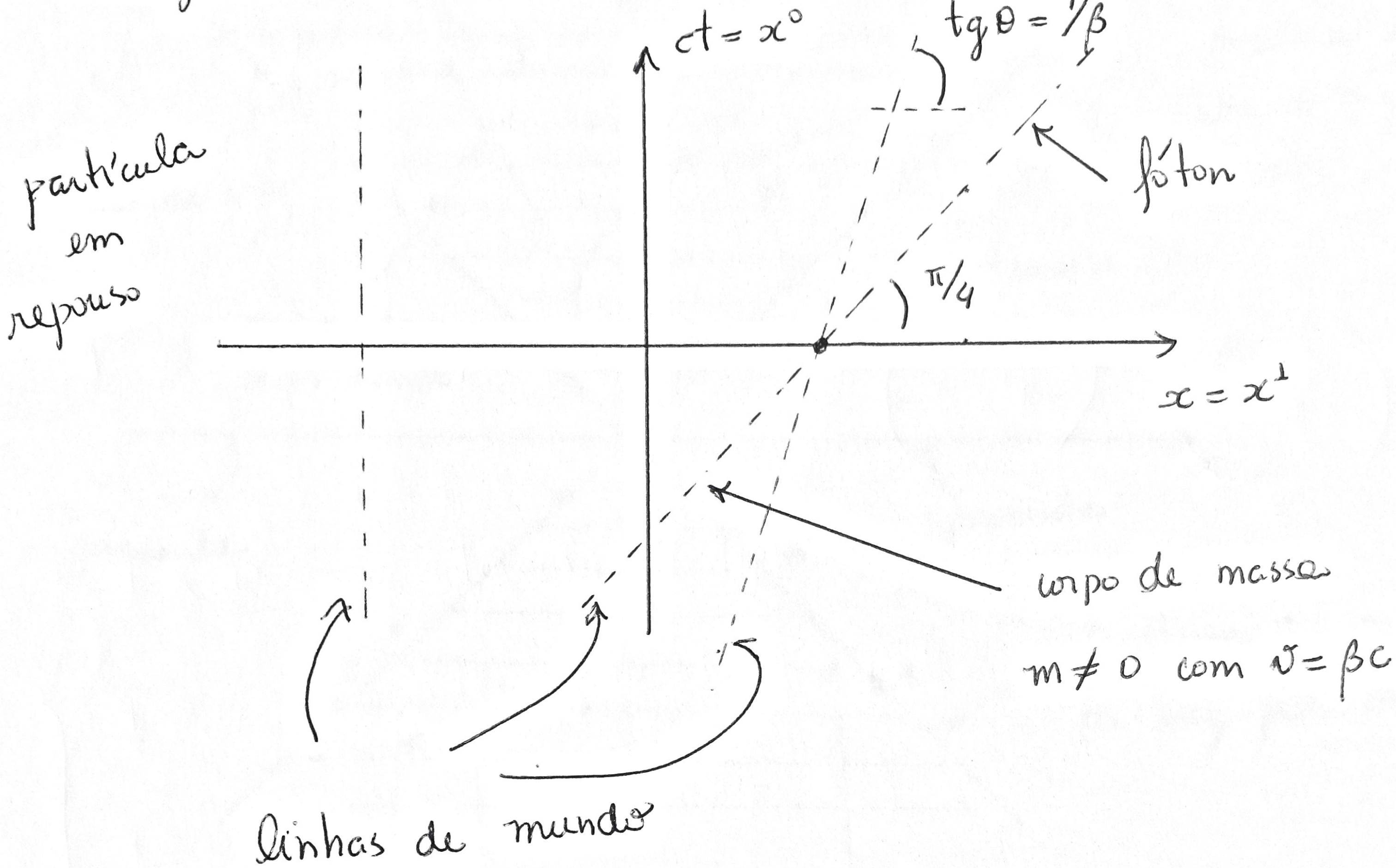
$$I \equiv \Delta x^\mu \Delta x_\mu$$

$$\begin{cases} I < 0 \text{, o intervalo é tipo tempo} \\ I > 0 \text{, o intervalo é tipo espaço} \\ I = 0 \text{, o intervalo é tipo luz} \end{cases}$$

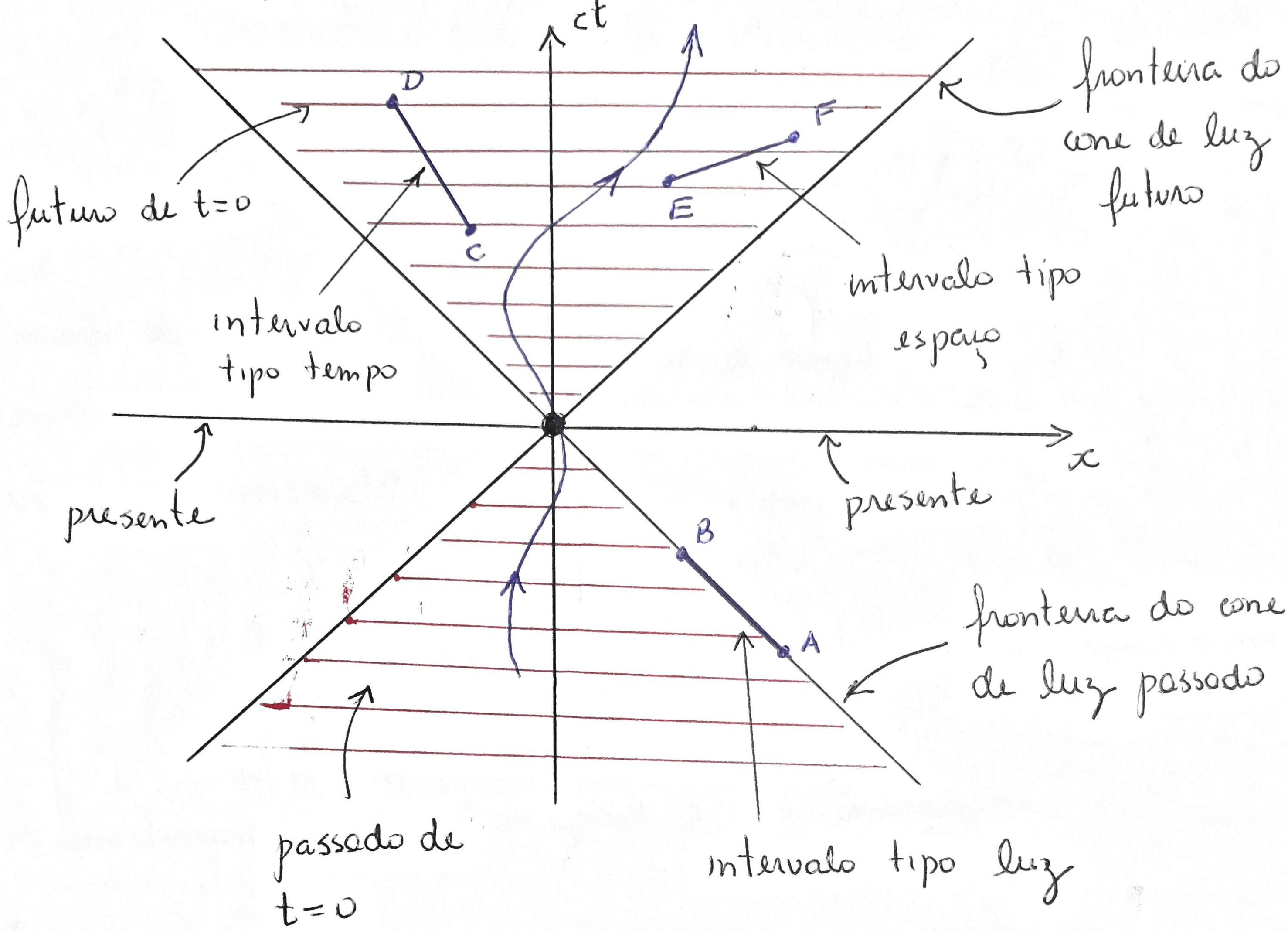
Prove que se o intervalo entre 2 eventos é do tipo tempo, é sempre possível encontrar um referencial inercial onde eles ocorrem no mesmo ponto do espaço. O mesmo é impossível se I é do tipo espaço.

Por outro lado, se I é do tipo espaço, prove que existe um referencial inercial em que os eventos são simultâneos.

Diagramas de espaço-tempo (ou de Minkowski)



Para uma partícula na origem em t=0



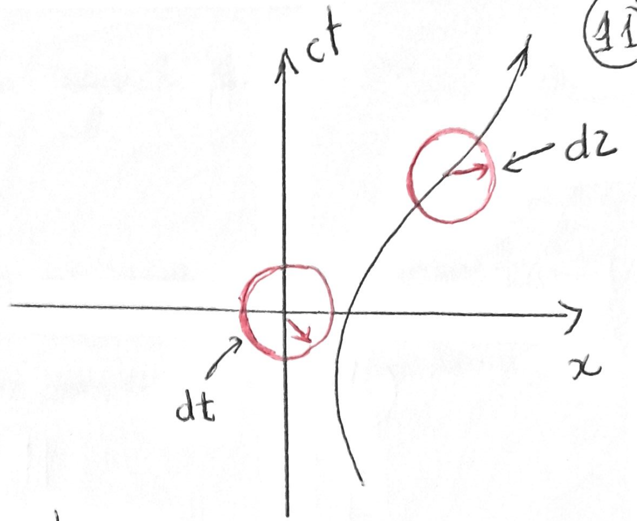
* Todos os intervalos entre eventos dentro dos cones de luz passado ou futuro e a origem são do tipo tempo.

* Se eventos têm I do tipo tempo, então o ordenamento temporal é absoluto, mas se é ~~do~~ tipo espaço, a ordem temporal depende do referencial

* Intervalos do tipo tempo ou luz existem entre eventos que podem estar causalmente conectados.

Tempo próprio

$$\underbrace{d\tau}_{} = \sqrt{1 - u^2/c^2}\ \underbrace{dt}_{}$$



intervalo de tempo infinitesimal marcado no relógio em movimento

intervalo de tempo infinitesimal marcado no relógio em repouso

$$\tau \equiv \text{tempo próprio}$$

Por construção, o tempo próprio é um invariante.

A 3-velocidade de um objeto ~~com~~ em movimento com respeito a observador em repouso em S é

$$\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right)$$

Como tanto os numeradores (dx^i, $i = 1, 2, 3$) quanto o denominador (dt) têm suas propriedades de transformação, a lei de transformação de $\vec{u}$ não é tão direta.

Um objeto com lei de transformação igual à de x^μ é a quadrivelocidade

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$dx^\mu \to$ 4-vetor deslocamento

$d\tau \to$ invariante (escalar)

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu \Rightarrow \eta'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, \eta^\nu$$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\eta^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{=u_i}\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Então

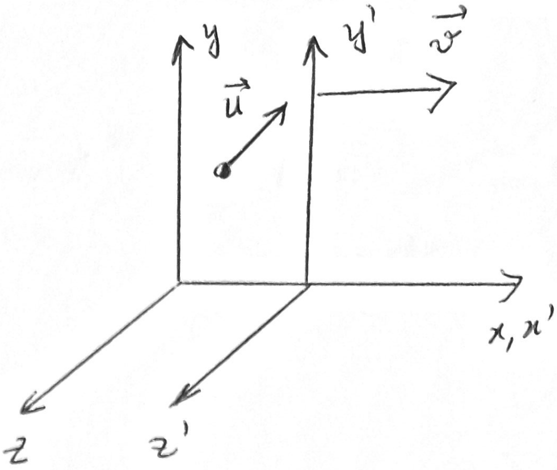
$$\eta^\mu = (\eta^0, \vec{\eta}) \quad \text{com} \quad \vec{\eta} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$\vec{\eta}$ é chamada de velocidade própria.

$$\begin{cases} \eta'^0 = \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) \\ \eta'^1 = \gamma(-\beta\eta^0 + \eta^1) \\ \eta'^2 = \eta^2 \\ \eta'^3 = \eta^3 \end{cases}$$

$$\eta'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, \eta^\nu$$

Lei de transformação da 3-velocidade



$$u'_x = \frac{dx'^1}{dt'}$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) = \gamma(x - vt)$$

$$dx'^1 = dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$ct' = x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) = \gamma c\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

Então

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

De maneira análoga

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$\eta^\mu \eta_\mu = -(\eta^0)^2 + \vec{\eta}\cdot\vec{\eta}$$

$$= \frac{-c^2}{1-u^2/c^2} + \frac{u^2}{1-u^2/c^2} = -c^2$$ invariante como esperado

Energia e momento relativísticos

Os conceitos de energia e momento da Mecânica Clássica precisam ser generalizados para que suas leis de conservação sejam consistentes com o Princípio da Relatividade.

Não é difícil de verificar, por exemplo, que se o momento clássico $m\vec{v}$ é conservado num dado referencial inercial S, usando a lei de transformação de $\vec{v}$, ele não será conservado em outro referencial S'.

O momento relativístico é definido como

$$\vec{p} \equiv m\vec{\eta} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Dessa forma, o momento relativístico pode ser visto como a parte espacial de um quadrivetor

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu$$

cuja parte temporal é

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

cuja interpretação física é que deve estão associada à energia relativística E. Mais precisamente

$$p^0 = \frac{E}{c} \Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Uma forma equivalente de visualizar a energia relativística, ~~foi~~ introduzida originalmente por Einstein, generalizando a massa m

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow E = m_{rel}c^2$$

Com a definição acima, mesmo um corpo em repouso tem energia

$$E = mc^2 \quad (\text{energia de repouso})$$

A definição de energia relativística anterior deve ser consistente c/ seu limite de baixa energia E_c, ou seja, a energia cinética

$$E_c = E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right)$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \dots - 1\right) \xrightarrow{u \ll c} \frac{1}{2}mu^2$$

Lei de conservação da energia e do momento relativísticos

"Num sistema fechado, a energia e o momento relativísticos totais são conservados"

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + \vec{p}\cdot\vec{p} = -\left(\frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)^2 + (m\vec{\eta})\cdot(m\vec{\eta})$$

$$= -\frac{m^2c^2}{1-u^2/c^2} + \frac{m^2u^2}{1-u^2} = -m^2c^2$$

Mas

$$p^\mu p_\mu = (E/c, \vec{p})(-E/c, \vec{p}) = -\frac{E^2}{c^2} + p^2$$

Portanto

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Perceba que essa última permite obter a relação entre energia e momento na RR até para partículas de massa nula como os fótons

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \xrightarrow{m \to 0} E = pc$$