Lista 8. Cadeias de Markov com tempo discreto II.

Para resolver alguns exercícios vamos precisar de conceito de cadeia de Markov *reversível*. Uma cadeia de Markov ergódica chama-se cadeia *reversível*, se existe a distribuição $\pi = (\pi_i)$ que satisfaz seguinte equação de *balanço detalhado*: para cada dois estados i, j

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \text{para todo } i \neq j. \tag{1}$$

Esse conceito é muito útil por seguintes simples motivos: primeiro, se a sua cadeia é reversível, então a medida $\pi = (\pi_i)$ é medida invariante, segundo, observe que a sistema das equações (1) é muito mais simples para achar a medida invariante de que o sistema (2), o que define a medida invariante. Isso significa, que se a medida $\pi = (\pi_i)$ satisfaz equação (1), então ela satisfaz a equação para medida invariante $\pi^T P = \pi^T$:

$$\pi_i = \sum_j \pi_j p_{j,i} \quad \text{para todo } i. \tag{2}$$

Sistema das equações (1) é conhecido também como sistema das equações de *balanço global*. Outra observação: se uma cadeia de Markov tem uma medida invariante, isso não significa que a cadeia é reversível, mas sempre verdade a proposição em outra direção.

1. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição a um passo P:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{vmatrix}.$$

   A cadeia é irredutível, por isso, ergódica, por isso tem distribuição invariante.

   (a) (1 ponto) Construa grafo de transição.

   (b) (1 ponto) Achar a distribuição invariante, usando o sistema de equações de *balanço global*, (2).

   (c) (1 ponto) Verifique se a cadeia é reversível, tentando solucionar equações (1).

2. (2 ponto) Maria e João jogam cartas. Maria joga melhor de que João: as chances ela ganhar são 4 versus 1. Ambos em total têm 5 reais. Cada jogada aposta um real: se Maria ganha um jogo, João paga ela um real, e caso João ganha, a Maria paga para João um real. Ganhador é aquele que fica com todos os 5 reais. Para equilibrar o jogo, eles decidiram que a Maria vai começar com um real e João com 4 reais. Essa distribuição inicial da banca realmente equilibra as chances de ganhar o jogo?

3. Um aparelho pode estar em dois estados: "Q"quebrado e "F"estado funcional. As probabilidades de transição de um dia para o outro são resumidas em uma matriz:

$$\begin{array}{c|cc} & F & Q \\ \hline F & 0.99 & 0.01 \\ Q & 0.85 & 0.15 \end{array}.$$

   (a) (1 ponto) Achar distribuição invariante para essa matriz de transição.

   (b) (1 ponto) Supomos que o estado inicial é F. Seja T é dia da primeira falha. Qual é a distribuição de T e achar a média desse tempo.

   (c) (1 ponto) A transição $F \to F$ interpreta-se que a máquina está sendo reparada. Seja tempo T_R é dias de reparo da máquina. Achar a distribuição desse tempo de reparo e a média de tempo de reparo.

4. Seja uma cadeia de Markov tendo como espaço de estados o conjunto $\{0, 1, 2\}$, e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

   (a) (1 ponto) Para quais valores de p essa cadeia é reversível?

   (b) (1 ponto) Achar medida invariante para valor qualquer $p \in (0, 1)$.