Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 10 - página .
Artur Hideyuki Tomita

4. Extensões do conceito de Limite (Cont.).

4.2. Limites infinitos.

Na seção anterior, vimos o infinito aparecer na parte do domínio. Agora ela também aparece na parte da imagem. A forma de estar próxima ao $+\infty$ ou $-\infty$ não muda. Na definição 1 vemos a situação em que o domínio e a imagem estão relacionadas ao infinito. Na definição 2 o domininío não está associado ao infinito, mas a imagem está. Na definição 2 temos uma definição similar para p^- ou para p e para limite indo para $-\infty$.

No Exemplo 1 temos que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Basicamente a ideia que se o denominador positivo vai encolhendo para 0 então sua inversa cresce arbitrariamente e por isso o limite vai para $+\infty$. No caso de $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ em módulo ele diminui para 0 então o módulo do inverso cresce para $+\infty$. Tirando o módulo, o número é sempre negativo assim, o inverso também é negativo mas cresce arbitrariamente em módulo e por isso o limite vai para $-\infty$.

O Exemplo 2 diz que o limite de x quando x vai para $+\infty$ é $+\infty$.

Na parte da imagem, vemos que as operações com infinito já não funcionam tão bem e alguns casos são ditos limite indefinido. Isso significa que para certas situações não existe um padrão de respostas pelo tipo de respostas de limite. Isto não significa que dado um limite específico, podemos terminar um exercício com a resposta indefinido. Os limites existem ou não. A conclusão que um limite é indefinido significa basicamente que o que foi tentado não funciona (então deve ser tentado outra resolução).

Na tabela nas páginas 104 e 105 e na observação estão indicadas os limites que sempre valem independente da função e valem devido aos seus limites.

Aqui é preciso distiguir que 0 escrito abaixo não deve ser visto como um número, mas o limite que vai para 0 e o mesmo com 1 nas indeterminações $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0 e ∞^0. Para algum caso específico destes, podemos ter que o limite existe e é um número real, pode existir e não ser um número real ou pode não existir.

No Exemplo 3 podemos aplicar $+\infty. + \infty = +\infty$ (que está nas observações).

No Exemplo 4, fazemos um argumento similar ao que foi mencionado na aula anterior. Vamos escrever o limite como um produto, onde um vai para ∞ e o outro vai para um número real diferente de 0, lembrando novamente que isso não serve para limites de polinômios quando x vai para um número real. No caso, o grau mais alto é 2, então separamos x^2 como fator no produto. Assim um deles vai para $+\infty$ e o outro vai para 3 e o produto dá $+\infty$.

No Exemplo 5 tomamos o grau mais alto no numerador (no caso 3) e o grau mais alto no denominador (no caso 2). Dai tomaremos um produto das frações da parte ilimitada vezes a parte limitada. Na fração da parte ilimitada temos

$\frac{x^3}{x^2} = x$, cujo limite vai para $+\infty$ (x vai para $+\infty$). Na parte limitada da basta tomar o limite de cima 1 pelo limite de baixo 2 e assim a fração da parte limitada vai para $\frac{1}{2} \neq 0$. Assim temos $\infty.\frac{1}{2} = +\infty$ (caso b) do Teorema da página 104).

No Exemplo 6, quando o limite vai para 0, precisamos saber qual o sinal dele, se quisermos calcular o limite da sua inversa.

Em geral, no caso do Exemplo 6, dizemos que se $f(x) \to 0^+$ quando $x \to p^+$ então $\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Este é um argumento que aparecerá frequentemente.

O Exemplo 7 é um exemplo 'numérico' do Exemplo 6. O Exemplo 8 usa a versão $f(x) \to 0^-$ então $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$.

O Exemplo 9 é uma observação sobre o limite de uma fração onde o numerador não vai para 0 e o denominador vai para 0.

O Exemplo 10. O numerador não vai para 0 e já sabemos o seu sinal e o denominador vai a 0. Então é preciso analisar o sinal do denominador. Para isto o denominador é fatorado para separar a parte que vai para 0. Assim ficamos com o produto $\frac{1}{x-2}$ e um outro fator que vai para um número real não nulo. Como x vai para 2^+ então $x > 2$ e assim $x - 2 > 0$. Assim $x - 2 \to 0^+$ e o inverso $\frac{1}{x-2}$ vai para $+\infty$. A outra parte vai para um número positivo então o produto vai para $+\infty$.

O Exemplo 11. Primeiro, 1 é raiz no numerador e no denominador. Então primeiro se fatora para poder cancelar o fator $x - 1$. Após isso, vemos que no que sobra, o numerador já não vai para 0 e o denominador vai para 0. Assim, agora estamos com um exemplo similar ao Exemplo 10.

Exemplo 12. O x vai para $-\infty$ segue o mesmo padrão para o $+\infty$. Tomamos o maior grau no numerador e no denominador, e 'puxamos' com isto x^3 em cima e x^2 embaixo. Então separamos a fração da parte ilimitada no numerador e o denominador e a fração da parte limitada no numerador e no denominador. A fração da parte ilimitada dá x e com isto seu limite vai para $-\infty$. A fração da parte limitada vai para um número positivo, assim o limite do produto dá $-\infty$.

O Exemplo 13 prova duas das observações feitas anteriormente $+\infty + \infty = +\infty$ e $+\infty. + \infty = +\infty$.

O Exemplo 14, prova mais duas observações:

se $L > 0$ então $+\infty.L = +\infty$ e $-\infty.L = -\infty$ e

se $L < 0$ então $+\infty.L = -\infty$ e $-\infty.L = +\infty$.

4.3, 4.4 e 4.5 Sequência e Limite de Sequência/ Limite de funções e sequências/ número e.

O limite de uma sequência é parecido com o limite quando x vai para $+\infty$. Só que o domínio ao invés de ser reais, são só os naturais.

A vantagem de passar para os naturais é usar a indução finita. Por exemplo, é assim que é definido o número e (subsecção 4.5). Também é utilizado a fórmula do Binômio de Newton (subsecção 4.3). A definição de e também usa a propriedade de supremo dos reais: todo conjunto não vazio A tal que existe M com $x < M$ para todo $x \in A$ possui supremo.

O e é importante devido a propriedade de derivação de e^x.

Uma consequência importante da subsecção 4.3é que se $a > 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e se $0 < b < 1$ então $\lim_{x\to+\infty} b^x = 0$.

No caso isto é feito primeiro para os naturais, depois pode-se ver que o limite não muda quando passamos para limite com domínio real.

Na secção 4.4 é mostrado como se pode usar sequências para mostrar que um limite não existe.

O Exemplo 11 é uma série geométrica.

Iremos pular os exercícios destas subsecções.