Aula 8. Cadeias de Markov II.

Classificação de estados.

Definição 1 Um estado j chama-se acessível pelo estado i se existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Notamos que pela definição n pode ser igual a 0. Mas

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Isso significa que qualquer estado i é acessível por ele mesmo.

Definição 2 Dois estados i e j são comunicáveis ($i \leftrightarrow j$) se i é acessível por j , e j é acessível por i .

Notamos que pela definição, qualquer estado i é comunicável com ele mesmo:

$$p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1.$$

A relação de comunicação satisfaz as seguintes propriedades

- Qualquer estado i se comunica com ele mesmo: $i \leftrightarrow i$.
- Se o estado i se comunica com o estado j , então, o estado j se comunica com o estado i : $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$.
- Se o estado i se comunica com o estado j , e o estado j se comunica com o estado k , então, o estado i se comunica com o estado k : $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

A primeira e a segunda propriedade segue diretamente das definições. A última propriedade pode ser provada pela equação de Kolmogorov-Chapman. Suponha que i se comunica com j e j se comunica com k . Pela definição, existem $n \geq 0$ e $m \geq 0$ tais que $p_{ij}^{(n)} > 0$ e $p_{jk}^{(m)} > 0$. Usando equação de Kolmogorov -Chapman, temos que

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Assim, obtemos que o estado k é acessível de estado i . Do mesmo jeito podemos provar que o estado i é acessível pelo estado k .

Definição 3 Diz-se que um conjunto de estados de uma cadeia de Markov forma uma classe C , se quaisquer dois estados neste conjunto são comunicáveis. Além disso, quaisquer dois estados comunicáveis da cadeia pertencem a uma classe.

Notamos que se existem duas classes C_1 e C_2 para uma cadeia de Markov, então elas são disjuntas ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) ou idênticas ($C_1 \equiv C_2$).

Definição 4 Uma cadeia de Markov X_n chama-se irredutível se todos os estados dela formam uma única classe.

Ex. 1. Sejam 0, 1, 2 estados de uma cadeia de Markov com a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

Determine se a cadeia de Markov com esta matriz de transição é irredutível.

Solução. Diretamente da matriz de transição, obtemos que $0 \leftrightarrow 1$ e $1 \leftrightarrow 2$. Pela propriedade de estados comunicáveis obtemos que $0 \leftrightarrow 2$, também. Então todos os estados são comunicáveis e formam uma classe. Esta classe é única, por isso, a cadeia de Markov é irredutível.

Ex. 2. Sejam 0, 1, 2, 3 estados de uma cadeia de Markov com a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine as classes que formam os estados desta cadeia.

Solução. Notamos que se a cadeia “caiu” no estado 3, ela nunca mais pode sair deste estado, por isso, o estado 3 forma uma classe (este estado é comunicável com ele mesmo). Qualquer estado i é acessível pelo estado 2, mas o estado 2 é acessível somente por ele mesmo. Isso significa que o estado 2 é comunicável somente por ele mesmo, por isso, temos mais uma classe formada pelo estado 2. Os estados 0 e 1 são comunicáveis e formam uma terceira classe. Então, o conjunto de estados desta cadeia se divide em três classes:

$$C_1 = \{0, 1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}.$$

Para cada estado i de uma cadeia de Markov X_n , definimos a probabilidade f_i de que, começando do estado i , a cadeia volte para o estado i :

$$f_i = P\{\text{existe um instante } n > 0 \text{ tal que } X_n = i \mid X_0 = i\}. \quad (1)$$

Definição 5 Um estado i se diz recorrente se $f_i = 1$. Um estado i se chama transitório se $f_i < 1$.

Notamos que se o estado i é recorrente, então a cadeia de Markov saindo do estado i , sempre vai voltar para este estado, ou o número de vezes que a cadeia está no estado i é infinito. Consequentemente, a média do número de vezes em que a cadeia está em tal estado é infinito. Por outro lado, se i é transitório, então a probabilidade de que, saindo deste estado i , a cadeia nunca mais volte neste estado é positiva; a probabilidade é igual a $1 - f_i$. Não é difícil ver que o número de vezes que a cadeia volta para tal estado tem distribuição geométrica:

$$P\{X_n \text{ exatamente } k \text{ vezes volta em estado } i \mid X_0 = i\} = f_i^k (1 - f_i), \quad k = 0, 1, \dots$$

A média do número de vezes em que a cadeia está no estado i é finita e igual a $1/(1 - f_i)$.

Seja I_n a função indicadora de que a cadeia está no estado i :

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i \\ 0, & \text{se } X_n \neq i \end{cases}$$

Agora, o número de vezes em que a cadeia está no estado i pode ser representado através da soma $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$. Logo, a esperança pode ser representada da seguinte forma:

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n \mid X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \quad (2)$$

Assim, provamos a seguinte proposição.

Proposição 6 O estado i é

$$\text{recorrente se } \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

$$\text{transitório se } \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

Notamos que se uma cadeia é finita (o número de estados dela é finito), então, não podem ser todos os estados transitórios.

Como uma consequência da Proposição 6, temos:

Proposição 7 Se o estado i é recorrente, e o estado i se comunica com o estado j , então o estado j também é recorrente.

Prova. Se i e j são comunicáveis, então, existem números inteiros k e m tais que $p_{ij}^{(k)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$. Para cada n inteiro, temos

$$p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$$

e somando em n , obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

já que $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} > 0$, e $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ é infinita porque o estado i é recorrente. $\square$

Passaio aleatório simples unidimensional. Consideramos um exemplo muito popular em teoria de probabilidades – passeio aleatório ou passeio de um homem bêbado. Os estados desta cadeia são os números inteiros $\mathbb{Z} = \{i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, com probabilidades de transição:

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = 1 - p, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Notamos que as probabilidades de transições não dependem da posição i . Estes tipos de cadeias chamam-se homogêneas no espaço de estados. Notamos também que todos os estados desta cadeia são comunicáveis. Isso significa que ou todos os estados são recorrentes ou todos os estados são transitórios. Consideramos o estado 0. Vamos tentar determinar se este estado é transitório ou recorrente. Usaremos a Proposição 6 da aula anterior: para saber se um estado é recorrente ou transitório é suficiente saber se a soma $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ é finita ou infinita.

Notamos que é impossível sair do ponto 0 e voltar para ele mesmo fazendo um número ímpar de passos:

$$p^{(2k+1)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

É possível voltar para o mesmo estado com $2k$ passos se e somente se o número de passos para frente é igual ao número de passos para trás. A sequência de passos neste caso não tem importância, por isso o número de seqüências possíveis de passos é $\binom{2k}{k}$ e cada passeio tem probabilidade $p^k(1-p)^k$ (k passos para frente e cada um deles com probabilidade p e k passos para trás, com probabilidade de cada um deles igual a $(1-p)$). Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{00}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k!}{k!k!} p^k (1-p)^k.$$

A análise de convergência das séries é uma análise de comportamento assintótico dos termos desta série. Qual é o comportamento assintótico de $\frac{2k!}{k!k!} p^k (1-p)^k$ quando k é grande? Neste caso, podemos usar a fórmula de aproximação de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (3)$$

Logo

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} p^n (1-p)^n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ converge se e somente se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \quad (4)$$

converge. O comportamento dos termos da última série (4) dependem do valor p . Sabemos que $4p(1-p) < 1$ se $p \neq 1/2$ e $4p(1-p) = 1$ se $p = 1/2$. Por isso a série (4) converge se $p \neq 1/2$ e diverge se $p = 1/2$. Logo, a cadeia é recorrente se $p = 1/2$ e a cadeia é transitória se $p \neq 1/2$. Se $p = 1/2$, a cadeia se chama *passeio aleatório simples simétrico*. Se $p \neq 1/2$, o passeio aleatório é um passeio aleatório assimétrico. Se, por exemplo, $p > 1/2$, o passeio em média sempre estará indo para frente.

Passaio aleatório simples simétrico bidimensional. Consideramos agora um passeio aleatório simples e simétrico em em duas dimensões. O espaço de estados do processo é $\mathbb{Z}^2 = \{(k, l) : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\}$. As transições são simétricas e uniformes:

$$P_{(i,j),(i+1,j)} = P_{(i,j),(i-1,j)} = P_{(i,j),(i,j+1)} = P_{(i,j),(i,j-1)} = \frac{1}{4}.$$

Usando o mesmo método como no caso unidimensional, vamos provar que este processo é recorrente. Já que esta cadeia também é irredutível, verificamos a recorrência para um estado, por exemplo, para o estado $\bar{0} = (0, 0)$. O mesmo raciocínio mostra que, saindo de um certo estado, só é possível voltar para ele mesmo se o número de passos para frente s for igual ao número de passos para trás s , e o número de passos para cima r deve ser igual ao número de passos para baixo r . Notamos que o número total de passos é par: $s + s + r + r = 2s + 2r = 2(s + r)$. Seja $2n$ o número total de passos e i o número de passos para cima, então, o número de passos para baixo é i também, e $n - i$ é

o número de passos para frente (para trás também é $n - i$). A sequência de passos não é importante, assim, o número de caminhos de voltas possíveis com $2n$ passos é

$$\sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}$$

Cada caminho tem probabilidade $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$. Logo, obtemos a seguinte fórmula para a probabilidade $p_{00}^{(2n)}$:

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{2n}{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Aqui, usamos a seguinte igualdade de análise combinatória:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Como anteriormente, para ver o comportamento assintótico desta probabilidade, usaremos a fórmula de Stirling (3), lembrando que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Logo, por (5), obtemos

$$p_{00}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n} \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}.$$

Isto significa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty.$$

Medida invariante, probabilidades limite.

Consideramos a seguinte matriz de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{vmatrix}$$

e calculamos $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^4$ e $\mathbf{P}^8$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{vmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.32 & 0.68 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P}^4 = \begin{vmatrix} 0.3344 & 0.6656 \\ 0.3328 & 0.6672 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P}^8 = \begin{vmatrix} 0.3333350 & 0.6666650 \\ 0.3333325 & 0.6666675 \end{vmatrix}.$$

Notamos que para todos os i 's, a probabilidade $p_{ij}^{(n)}$ converge (quando $n \rightarrow \infty$) para algum número que é o mesmo para todos os estados i . Em outras palavras, existe uma probabilidade limite de que o processo, depois de um número grande de passos, esteja no estado j , e esta probabilidade limite não depende do estado inicial. Para formular este teorema sobre a probabilidade limite, vamos precisar de propriedades adicionais de cadeia de Markov.

Definição 8 Diz-se que o estado i tem período d se $p_{ii}^{(n)} = 0$ se e somente se n não se divide em d , i.e., n/d tem resto diferente de zero. Estado com $d = 1$ chama-se estado aperiódico.

O passeio aleatório simples é um exemplo onde qualquer estado é periódico com $d = 2$. Seja T_i o tempo de voltar para o estado i começando do i :

$$T_i = \min\{n > 0 : X_n = i\}, \quad X_0 = i.$$

Definição 9 Se o estado i é recorrente, então ele chama-se recorrente positivo se $ET_i < \infty$. O estado i chama-se estado ergódico, se este estado é aperiódico e recorrente positivo.

Agora estamos prontos para formular o teorema principal de teoria de cadeias de Markov.

Theorem 10

- Para qualquer cadeia de Markov ergódica (todos os estados dela são ergódicos) o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe e não depende do i .
- Seja

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j \geq 0.$$

Então o vetor $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ é solução única do seguinte sistema

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, & j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Nós não vamos provar o teorema.

- Notamos que a segunda equação do sistema (6) mostra que o vetor π é uma distribuição de probabilidade no conjunto de estados da cadeia de Markov em consideração.
- Interpretamos o limite π_j como a probabilidade do processo estar no estado j . Também pode ser interpretada como a fração de tempo que a cadeia passa no estado j (teorema ergódico para cadeia de Markov).
- Em caso de cadeia irreductível, recorrente positiva, mas *periódica*, mostra-se que $\pi = (\pi_j, j \geq 0)$ é uma solução única não-negativa da equação (6), mas, nesse caso π_j não pode ser interpretada como a probabilidade limite (em caso de cadeia periódica não existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$). Mas, neste caso, π_j pode ser interpretada como a proporção de tempo que a cadeia de Markov visita o estado j .

Ex.1. Sabemos que se hoje chove, então, amanhã vai chover com probabilidade α , e se hoje não chove, então, vai chover amanhã com probabilidade β . Construa uma cadeia de Markov correspondente e ache as probabilidades limite desta cadeia.

Solução. Seja o estado "0" corresponde a um dia que chove, e o estado "1" quando não chove. A matriz de transições é

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{vmatrix}.$$

Encontraremos as probabilidade limite da solução do sistema de equações (6):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \pi \mathbf{P} = \pi \\ \sum \pi_j = 1 \end{cases} &= \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_1 = \pi_0 (1 - \alpha) + \pi_1 (1 - \beta) \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \alpha + (1 - \pi_0) \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 (1 - \alpha + \beta) = \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta} \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta} \\ \pi_1 = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + \beta} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema da ruína do jogador.

Consideramos dois jogadores A e B . O jogador A ganha um jogo com probabilidade p e recebe 1 real do parceiro B . O jogador B ganha um jogo com probabilidade $q = 1 - p$ e recebe 1 real do seu parceiro. Não tem empate neste jogo. Todos as apostas são independentes. Seja N o número total de reais que os jogadores têm. O jogo para quando um dos dois jogadores ganha todos os N reais.

Se X_n é a grana do jogador A depois da n -ésima aposta, então, X_n forma uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ e probabilidades de transições

$$p_{00} = p_{NN} = 1, \quad p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = q, \quad \text{e os outros são iguais a } 0.$$

Esta cadeia possui três classes: $\{0\}$, $\{1, 2, \dots, N - 1\}$ e $\{N\}$. A primeira e a última classe são recorrentes, começando daí, pra sempre permanecemos neste estado. A segunda classe é transitória; significa que o jogo acaba (em tempo finito), i.e., com probabilidade 1 ou A ou B estará com toda grana.

Seja P_i probabilidade de que o jogador A ganhe todos N reais dado que no início ele estava com i reais:

$$P_i = P\{\exists n : X_n = N \mid X_0 = i\}$$

Condicionando pelo resultado da primeira jogada, obtemos

$$\begin{aligned} P_i &= P\{\exists n : X_n = N \mid X_0 = i\} \\ &= P\{\exists n : X_n = N \mid X_1 = i + 1\}P\{X_1 = i + 1 \mid X_0 = i\} \\ &\quad + P\{\exists n : X_n = N \mid X_1 = i - 1\}P\{X_1 = i - 1 \mid X_0 = i\} \\ &= pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Reescrevemos isso de outra forma, usando o fato que $p + q = 1$:

$$(p + q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \Rightarrow P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

A probabilidade P_0 é igual a zero, logo

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1 \\ P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i - P_{i-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1 \\ &\vdots \\ P_N - P_{N-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1. \end{aligned}$$

Logo

$$P_i - P_1 = P_1 \left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right]$$

ou

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} P_1, & \text{se } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1, & \text{se } \frac{q}{p} = 1. \end{cases}$$

Usando $P_N = 1$, obtemos

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^N}{1 - (q/p)}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, segue que

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Notamos que se $N \rightarrow \infty$

$$P_i \longrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{se } p > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se a probabilidade de ganhar numa jogada é maior de que 50%, então, a probabilidade de que a quantia de reais cresça para sempre é positiva. Este tipo de jogo às vezes chama-se um jogo com o Universo.

Ex. 1. Suponha que A é mais esperto do que B - o A ganha uma jogada com probabilidade $p = 0.6$. Qual é a probabilidade de que o jogador A ganhe a banca se ele começa com 5 reais, enquanto o jogador B começa com 10 reais? E se A começa com 10 reais e B começa com 20 reais?

S. A probabilidade desejada pode ser calculada através da fórmula (7), usando $i = 5, N = 15$, e $p = 0.6$. Assim, obtemos que a probabilidade é

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{15}} \approx 0.87.$$

A outra probabilidade é

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30}} \approx 0.98.$$

Processo de ramificação.

Supomos que um indivíduo gera k filhos com probabilidade p_k . Seja X_0 o número inicial de indivíduos e suponha que cada indivíduo gera filhos independentemente um do outro. Filhos de X_0 indivíduos formam a primeira geração X_1 , filhos da primeira geração formam segunda geração X_2 , etc. $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ forma uma cadeia de Markov com estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Notamos que o estado 0 é um estado absorvente ($p_{00} = 1$).

Notamos também que se $p_0 > 0$, então todos os outros estados são transitórios (porque a probabilidade de acessar o estado absorvente é positiva $p_{i0} = p_0^i$). Assim, se $p_0 > 0$, então, a população ou vai morrer ou vai crescer para até o infinito.

Sejam

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^2 p_k \quad (8)$$

a média e variância do número de filhos. Calculamos a média e a variância de X_n . Notamos que X_n pode ser representado da seguinte forma:

$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_k,$$

onde Z_k representa o número de filhos do k -ésimo indivíduo da $(n - 1)$ -ésima geração. Temos

$$E[X_n] = E[E[X_n | X_{n-1}]] = E\left[E\left[\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_k \mid X_{n-1}\right]\right] = E[X_{n-1}\mu] = \mu E[X_{n-1}].$$

A última equação nos diz que se $X_0 = 1$, então

$$E[X_n] = \mu^n.$$

Ex.2 Prove que

$$\text{Var}[X_n] = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right), & \text{if } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{if } \mu = 1 \end{cases}$$

Seja π_0 a probabilidade de extinção da população

$$\pi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 0 \mid X_0 = 1\}. \quad (9)$$

Notamos que $\pi_0 = 1$ se $\mu < 1$ e

$$\mu^n = E[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{X_n = k\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = k\} = P\{X_n \geq 1\} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pode ser provado que quando $\mu = 1$, também temos $\pi_0 = 1$. E quando $\mu > 1$, π_0 é solução da seguinte equação:

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0^k p_k. \quad (10)$$

Exercícios domésticos. Exercícios para Lista: 2,4,10,13,15,18.

- Para a cadeia do Exemplo 2, determine quais estados são recorrentes e quais são transitórios.
- ([2], p.232) Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2\}$, vetor de probabilidade inicial igual a $p^{(0)} = (1/4, 1/2, 1/4)$, e matriz de transição a um passo dada por

$$P = \begin{vmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{vmatrix}.$$

- Calcule $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\}$.
- Mostre que $P\{X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \mid X_0 = 0\} = p_{01}p_{11}$.
- Calcule $p_{01}^{(2)}$.

3. ([2], p.233) Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P . Determine quais são as classes de comunicação fechada e os estados absorventes para cada um dos seguintes casos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

4. Para as seguintes cadeias de Markov, determine as classes de estados e a classificação deles (recorrentes ou transitórios):

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Provar que se o número de estados de uma cadeia de Markov é igual à M , e se o estado j é acessível pelo estado i , então o estado j é acessível pelo estado i pelo menos em M passos.

6. ([2], p. 233) Uma determinada fábrica possui 2 máquinas e uma equipe de reparos. Suponha que a probabilidade de que qualquer máquina venha a se quebrar em um dado dia é α . Suponha que, caso a equipe de reparos esteja trabalhando em uma máquina, a probabilidade de que venham a completar os reparos em mais um dia seja β . Para simplificar, ignore a possibilidade de um término de reparo ou de uma avaria ocorrer, em outro caso que não seja ao final de um dia. X_n representa o número de máquinas em funcionamento no n -ésimo dia. Suponha que o comportamento de X_n possa ser modelado por uma cadeia de Markov.

(a) Determine a matriz de transição a um passo (P).

(b) Se o sistema começa com ambas as máquinas em funcionamento, qual é a probabilidade de que ambas estejam em funcionamento dois dias depois?

7. ([2], p.234) *Modelo de difusão de Ehrenfest*. Suponha que se tenha um recipiente com uma membrana que o separa em compartimentos A e B . Inicialmente, há j moléculas no compartimento A e $a - j$ no compartimento B . Diz-se que ocorre uma *transição* sempre que uma molécula atravessa a membrana (tanto de A para B como de B para A). Seja X_n o número de moléculas no compartimento A após n transições. Em cada transição, X_n aumenta ou diminui exatamente uma molécula. Suponha que a probabilidade de que uma molécula mude de compartimento seja proporcional ao número de moléculas no compartimento de onde saiu tal molécula. Monte um modelo de uma cadeia de Markov desse processo de difusão.

8. ([2], p.234) Suponha que em uma linha de montagem final para carros haja o seguinte conjunto de regras:

- Dois conversíveis não podem jamais se seguirem na linha, porque o conteúdo de trabalho desequilibraria a linha.
- Uma perua deve ser seguida de um sedan para equilibrar a linha.
- Um sedan tanto pode ser seguido por uma perua como por um conversível, mas não por um sedan.

Somente esses três modelos são fabricados nessa linha. Monte uma matriz de transição possível para essas regras, inserindo as letras $a, b, c, d, \dots$ etc., para os valores que não são numericamente definidos pelas regras acima.

(a) A cadeia é irredutível?

(b) Qual é a probabilidade de que após um conversível o próximo ocorra na linha, com um espaço de diferença (separado por outro veículo)? Use suas letras $a, b, c, d, \dots$ se necessárias.

(c) Se P é uma matriz de transição a um passo, que interpretação você daria ao (ij) -ésimo elemento de P^n , para n grande?

- (d) Se tivesse um programa de produção dado por vetor de proporção de cada tipo de carro a ser feito em um mês, como poderia se determinar uma sequência de probabilidades que correspondesse ao programa e às regras das sequências fornecidas neste problema?
- (e) Suponha que se firmou um contrato para se entregar 10000 carros ao final de um mês. Desses 10000, aproximadamente 50% tinham que ser sedan, 10% tinham que ser perua e 40% conversível. Determine alguma regra de programação de probabilidade que assegure essa produção e que ainda corresponda às regras deste problema.

9. Seja uma cadeia de Markov tendo como espaço de estados o conjunto $\{0, 1, 2\}$, e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcule P^2 .
- (b) Mostre que $P^2 = P^4$.
- (c) Calcule P^n para todo $n \geq 1$.
10. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a cadeia de Ehrenfest (veja Problema 7) e suponha que X_0 tenha distribuição binomial com parâmetros d e $1/2$, isto é:

$$P(X_0 = x) = \frac{\binom{d}{x}}{2^d}.$$

Encontre a distribuição de X_1 .

11. Dividimos uma sociedade em três classes sociais: baixa, média, alta. A classe social dos filhos depende da classe social dos pais. Seja "0" – classe alta, "1" – classe média e "2" – classe baixa. As frequências correspondentes podem ser representadas através da matriz

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{vmatrix}$$

o que significa que, por exemplo, se os pais são de classe média, então os filhos são de classe alta com probabilidade 0.05, de classe média com probabilidade 0.70 e de classe baixa com probabilidade 0.25. Qual é a proporção de pessoas de classe alta, média e baixa nesta sociedade?

12. Suponha que um indivíduo pode estar em três estados emocionais durante um dia: "mau humor", "normal" e "bom humor"; denotamos estes estados por "0", "1" e "2", respectivamente. A matriz de transições dos estados emocionais de uma pessoa de um dia para o outro pode ser descrito através da seguinte matriz de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Por exemplo, se uma pessoa hoje está em um estado de "bom humor", amanhã ela estará em um estado "bom humor" com probabilidade 0.5, "normal" com probabilidade 0.4 e "mau humor" com probabilidade 0.1. Escolhemos por acaso uma pessoa desta sociedade. Qual é a probabilidade de que esta pessoa esteja com "mau humor"?

13. Considere a Cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Mostre que essa cadeia tem uma única distribuição estacionária π e encontre π .

14. Seja π a distribuição estacionária de uma Cadeia de Markov. Mostre que, se $\pi(x) > 0$ e x está conectado a y , então $\pi(y) > 0$.
15. Para um processo de ramificação, encontre a probabilidade de extinção π_0 quando

- (a) $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4$;
- (b) $p_0 = 1/4, p_2 = 3/4$;
- (c) $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_3 = 1/3$.
16. Seja X_n um processo de ramificação. Supomos que $X_0 = l$. Qual é a média e a variância de X_n para este processo?
17. Consideramos um passeio aleatório simples e simétrico no intervalo $[0, M]$, onde os pontos 0 e M são pontos absorventes. O passeio começa no ponto $k_0 \in [0, M]$. Qual é a probabilidade de que o passeio pare no estado 0 ?
18. João e Maria jogam xadrez. Maria joga melhor de que João em média 2 contra 1 (chances de Maria ganhar um jogo são 2:1). Para igualar as chances de ganhar banca, eles decidem que a Maria fica com 5 pontos quando o João com 10. As chances de ganhar a banca com esta divisão são iguais para os jogadores?

Referências

- [1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models*. Chapter 4.4.
- [2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos*. Capítulo 8.