Campos Magnetostáticos II

[R. Fitzpatrick, Classical Electromagnetism; Cap. 5]

[J.D. Jackson, Classical Electrodynamics; Cap. 5]

→[A. Zangwill, Electromagnetic Field Theory; Cap. 11]

Campo de uma espira de corrente a grandes distâncias $r \gg R$

$$\psi(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2} \sum_{\ell=1,3,..}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell+1}(0) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{\ell=1,3,..} P_{\ell+1}(0) \frac{R^{\ell+1}}{r^{\ell+2}} \begin{cases} -(\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\hat{e}_r \\ +\dfrac{d}{d\theta} P_\ell(\cos\theta)\hat{e}_\theta \end{cases}$$

No limite $r \gg R$, a componente $\ell = 1$ predomina e, usando

$$P_\ell(0) = \begin{cases} 0;\, \ell\ par \\ (-1)^{\ell/2} \dfrac{1.3.5 \ldots (\ell-1)}{2.4.6 \ldots .\, \ell};\, \ell\ impar; \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi R^2 I}{r^3} [2\cos\theta\, \hat{e}_r + \sin\theta\, \hat{e}_\theta]}$$

Distribuições localizadas de corrente – desenvolvimento em multipolos

[No caso do potencial vetor, não é possível seguir um procedimento análogo à expansão multipolar da Eletrostática]

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$$|\vec{r} \gg \vec{r}'| \Longrightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$

Em coordenadas cartesianas, temos

$$\therefore\ A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}\int j_i(\vec{r}')dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\int j_i(\vec{r}')\vec{r}'dV' + \cdots$$

Método de resolução das integrais: $f(\vec{r}')$; $g(\vec{r}')$ das funções “bem comportadas”. Se $\vec{j}(\vec{r}')$ é localizado e $\nabla\cdot\vec{j} = 0$, temos

$$\int (f\vec{j}\cdot\nabla' g + g\vec{j}\cdot\nabla' f)dV' = \int [f\vec{j}\cdot\nabla' g - f\nabla'\cdot(g\vec{j}) + \nabla'\cdot(gf\vec{j})]V'$$

$$\therefore \int (f\vec{j}\cdot\nabla' g + g\vec{j}\cdot\nabla' f)dV' = \int [fj\cdot\cancel{\nabla' g} - fg\nabla'\cdot\cancel{\vec{j}} - f\vec{j}\cdot\cancel{\nabla' g}]dV' + \int f\cancel{g\vec{j}}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int (f\vec{j}\cdot\nabla' g + g\vec{j}\cdot\nabla' f)dV' = 0$$

Escolhas

$$f = 1;\, g = x'_i;\, \nabla' g = \hat{e}_i \rightarrow \int j_i(\vec{r}')dV' = 0$$

$$f = x'_i;\, g = x'_j \rightarrow \int \left(x'_i j_j + x'_j j_i\right)dV' = 0 \rightarrow \int x'_i j_j dV' = -\int x'_j j_i dV'$$

$$\vec{r}\cdot\int \vec{r}' j_i dV' = \sum_j x_j \int x'_j j_i dV' = -\frac{1}{2}\sum_j x_j \int \left(x'_i j_j - x'_j j_i\right)dV'$$

$$\therefore\ \vec{r}\cdot\int \vec{r}'\, j_i dV' = -\frac{1}{2}\int [(\vec{r}\cdot\vec{j})\vec{r}' - (\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{j}]_i dV' = -\frac{1}{2}\left[\vec{r}\times\int \left(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right)dV'\right]_i$$

Vetor magnetização ou densidade de momento magnético

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

Momento magnético

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\, dV \;\rightarrow\; \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{m}\left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) - (\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right]; \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

$$\therefore\; \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i,j}\left[m_i \frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}|^3}\hat{e}_j + r_j \hat{e}_j m_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\vec{r}|^3}\right]$$

$$\therefore\; \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}}$$

Conclusão do tema (concluir análise da Seção 5.6 do Jackson)

- Momento magnético para circuito filamentar de corrente

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint \vec{r} \times d\vec{\ell}$$

- Para circuito plano, $|\vec{m}| = I \times \int dS$, independente da forma do circuito.
- Se a densidade de corrente for devida a uma distribuição de cargas q_i, de massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$,

$$\vec{m} = \sum_i \frac{q_i}{2m_i} \vec{L}_i \,,$$

onde $\vec{L}_i$ é o momento angular da carga om relação à origem de $\vec{r}$.

- Para expressar corretamente a integral do campo magnético em um volume, a expressão do campo de dipolo magnético deve ser generalizada para

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{m}\delta(\vec{r})\right]$$

Força,Torque e Energia em um campo magnético externo

Efeito de um campo externo variando lentamente

$$\frac{\left|\nabla\left|\vec{B}\right|\right|}{\left|\vec{B}\right|} \ll \mathcal{L}^{-1}$$

onde $\mathcal{L}$ é a maior dimensão da distribuição localizada de corrente.

Desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem do sistema de coordenadas

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\,\vec{B}\Big|_0 + \cdots,$$

$$\therefore\ \vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})dV = \left[\int dV\vec{j}(\vec{r})\right] \times \vec{B}(0) + \int \vec{j}(\vec{r}) \times \left[(\vec{r}\cdot\nabla)\,\vec{B}\Big|_0\right] + \cdots$$

Em regime estacionário, a corrente tem que se fechar sobre si mesma, de forma que a primeira integral é nula.

Portanto, a componente i não nula da força é

$$F_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \int j_j(\vec{r})(\vec{r}\cdot\nabla)\, B_k\Big|_0\, dV = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \left(\nabla\, B_k\Big|_0\right).\int \vec{r} j_j(\vec{r}) dV$$

Usamos o mesmo procedimento de quando calculamos $\vec{r}\cdot\int \vec{r}'\, j_i dV'$, obtendo

$$\int j_j(\vec{r})(\vec{r}\cdot\nabla)\, B_k\Big|_0\, dV = -\frac{1}{2}\left[\left(\nabla\, B_k\Big|_0\right)\times\int \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})dV\right]_j$$

$$\therefore\ F_i = \textstyle\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}(\vec{m}\times\nabla)_j B_k \rightarrow F_i = (\vec{m}\times\nabla)_j B_k - (\vec{m}\times\nabla)_k B_j$$

$$\therefore\ F_i = \left(m_k \frac{\partial}{\partial x_i} - m_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right) B_k - \left(m_i \frac{\partial}{\partial x_j} - m_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right) B_j$$

$$\therefore\ F_i = m_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} + m_j \frac{\partial B_j}{\partial x_i} + m_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} - m_i\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_i} + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} + \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \sum_k m_k \nabla B_k(\vec{r}) \ \rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B});\ \vec{m}\ const}$$

Considerando a força como o gradiente de uma energia potencial,

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U; \;\; U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

Nota: esta energia não é a energia total do campo, porque não está considerada a energia feita pelas fontes para colocar o dipolo magnético em sua posição.

Torque

Alunos devem seguir as derivações do Jackson que levam à expressão para o torque sobre o dipolo magnético

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}(0)}$$