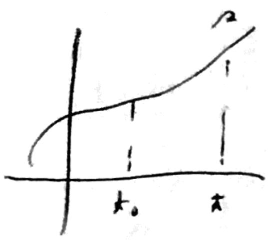
Taxa de variação

- Aqui não veremos nenhum conceito novo, "apenas" uma outra interpretação/aplicação para o conceito de derivada (ou até mesmo, poderia ter sido uma outra maneira de motivar/introduzir o conceito, que é o ~~que~~ como alguns livros fazem).

- Lembrando, falamos anteriormente de velocidade (instantânea):



$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{velocidade média}$$

$$v = v_{inst}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{velocidade instantânea em } t_0 = s'(t_0)$$

Note que:

v_m: mede a variação média do espaço em relação ao tempo

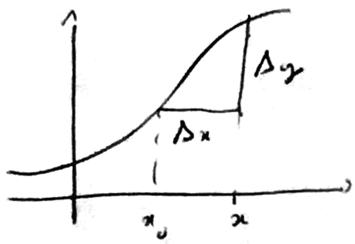
v: mede a variação instânea (do espaço em relação ao tempo)

- Mas poderíamos fazer o mesmo raciocínio usando outras funções, ou seja, sempre que temos $y = y(x)$, onde y é uma quantidade/grandeza que depende de outra quantidade/grandeza x.

Por exemplo: $v(t)$ = função velocidade

$T(t)$ = função temperatura

· Generalizando essa ideia, se $y = y(x)$



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = taxa de variação média

$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = taxa de variação (instantânea) de $y = y(x)$ no ponto x_0.

· Talvez a ideia fique mais clara através dos exemplos que faremos a seguir, onde veremos problemas de taxa de variação, que é uma aplicação importante da derivada.

· <u>Problemas de taxa de variação</u> (ou de <u>taxas relacionadas</u>): a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em função da de outra (que pode ser medida mais facilmente).

<u>Por exemplo</u>: quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume como o raio do balão crescem, e essas taxas de crescimento estão relacionadas; mas é mais fácil medir a taxa de crescimento do volume, (por exemplo), do que a do raio.

· Nestes problemas é comum usarmos a derivação implícita e também muitas vezes é usada a notação de Leibniz.

Exemplo: Um petroleiro tem um vazamento de óleo que cobre uma área circular de raio r. Com o passar do tempo o raio cresce e portanto a área também cresce.

Temos: . área $= A = \pi r^2$

. mas note que neste caso, temos r, e portanto também A, em função do tempo

Ou seja, temos $A(t) = \pi [r(t)]^2$ (é assim que temos que olhar)

Pergunta: Como se relacionam as taxas de variação de A $\left(= \frac{dA}{dt} = A'(t)\right)$ e de r, $\left(= \frac{dr}{dt} = r'(t)\right)$ em relação ao tempo?

taxa de variação $\rightsquigarrow$ derivada

Temos $A(t) = \pi [r(t)]^2$.

$\therefore$ (fazendo a derivação implícita)

$$A'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t)$$

(ou se preferir: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$)

. Suponha que a área cresça a uma taxa de $10.000\ m^2/h$.

$\therefore$ $A'(t) = \frac{dA}{dt} = 10.000\ m^2/h$

Qual a taxa de variação de r no instante que r atinge 2 km?

Queremos $\frac{dr}{dt} = r'(t_0)$, t_0 tal que $r(t_0) = 2km = 2000\,m$.

Mas pelo que vimos acima, $A'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0)$

$\therefore$ $10\,000 = 2\pi\, 2000 \cdot r'(t_0) \Rightarrow \boxed{r'(t_0) = \frac{5}{2\pi}\ m/h}$

//

• Os próximos dois exemplos faremos na forma de exercício resolvido

Exercício 1: Está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de $100 \text{ cm}^3/s$. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o diâmetro é 50cm?

$$V: \text{vol. da esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore V(t) = \frac{4}{3}\pi [r(t)]^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/s$$

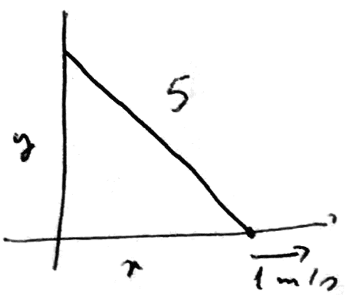
Queremos $\frac{dr}{dt}$ no momento em que o diâmetro é 50 cm, ou seja, $r = 25$cm.

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi [r(t)]^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\pi [r(t)]^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore 100 = 4 \cdot \pi (25)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\overset{25}{\cancel{100}}}{\cancel{4} \cdot \pi (25)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{25\pi} \text{ cm}/s}$$

Exercício 2: Uma escada com 5m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1m/s, com que velocidade o topo da escada está descendo, quando a base da escada está a 3m da parede?



Temos: $\frac{dx}{dt} = 1m/s = x'(t)$

$x(t_0) = 3m \Rightarrow y(t_0) = 4m$

Queremos: $y'(t_0)$?

Mas $x^2(t) + y^2(t) = 5$

$\therefore \cancel{2}x(t).x'(t) + \cancel{2}y(t)y'(t) = 0$

Em $t = t_0$ temos

$3.1 + 4.y'(t_0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{y'(t_0) = -\frac{3}{4} m/s}$

Obs: Tanto faz usar $x'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$, usem o que vocês se sentirem mais confortável, principalmente no início. Com o tempo é bom se acostumar com as duas notações, já que as duas podem aparecer em algum texto que forem ler.