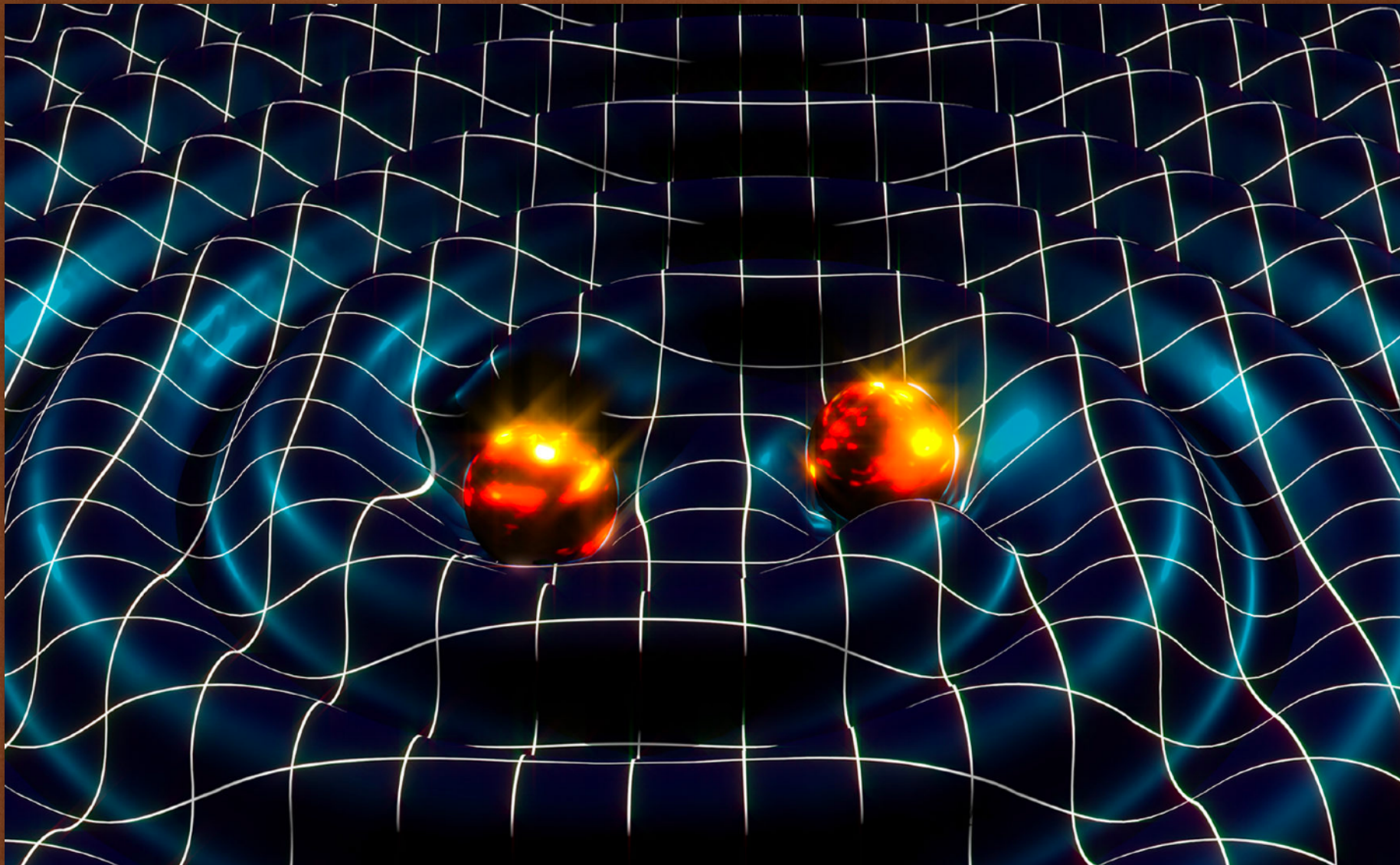


INTRODUÇÃO À

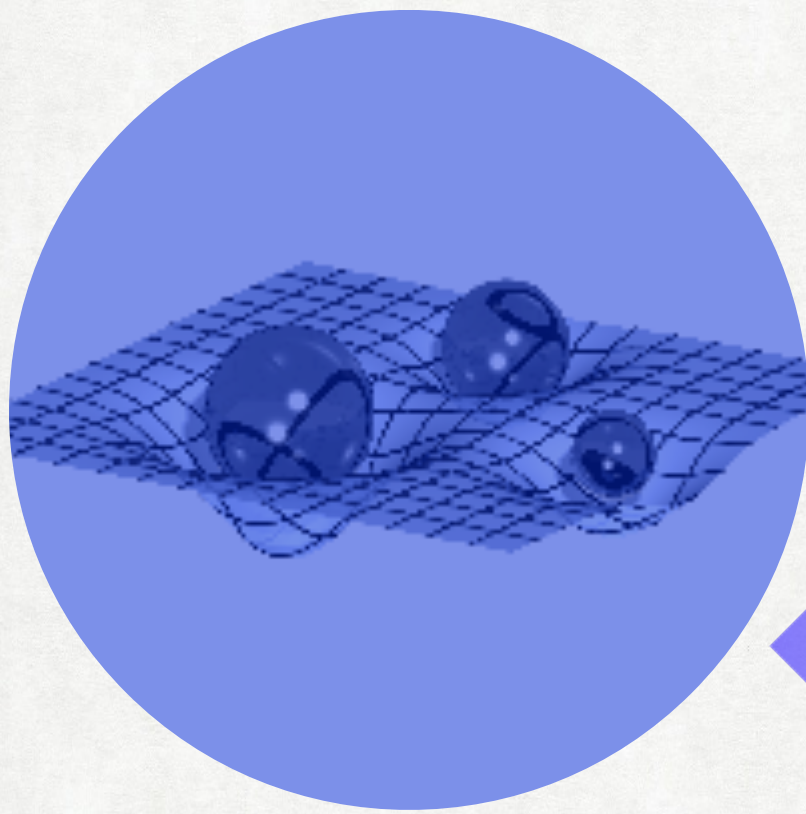


RELATIVIDADE

AULA 19 - 18/05/2020

- Perturbações da métrica e Equações de Einstein no limite de campo fraco
- A invariância de calibre ("gauge")
- Ondas no Eletromagnetismo e na Relatividade Geral
- Leitura: Capítulo 7 do Carroll. Esta aula: 7.1-7.2

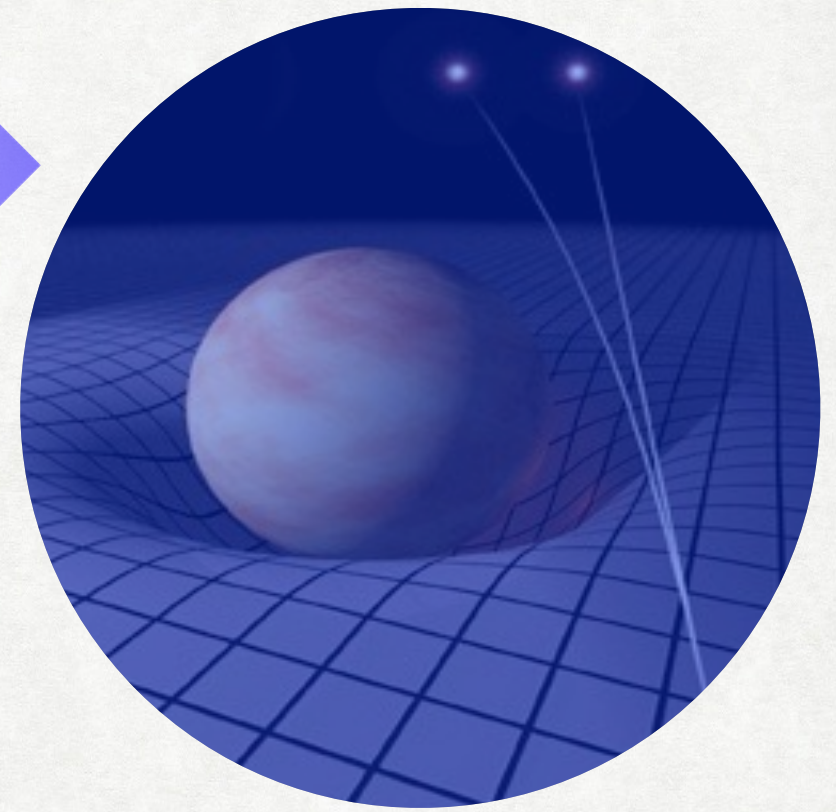
AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN



A matéria curva o espaço-tempo,
e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

... enquanto a métrica determina
como a matéria se move.



A métrica e a curvatura do espaço-tempo são ***campos dinâmicos***, que mudam conforme a configuração de massas, energias, pressões e estresses da matéria.

Porém, assim como no Eletromagnetismo, os campos gravitacionais também têm uma ***dinâmica própria***, como evidenciado pelo caráter das Equações de Campo de Einstein: ***equações de 2a ordem no tempo e no espaço***.

Veremos hoje que Einstein imediatamente reconheceu essa ***dinâmica intrínseca da métrica*** e previu que, na Relatividade Geral, teríamos a possibilidade de ***ondas gravitacionais***.

PERTURBAÇÕES DA MÉTRICA DE MINKOWSKI

- Em geral, o espaço-tempo é, na maior parte das situações, algo ***muito próximo*** do espaço-tempo de Minkowski:

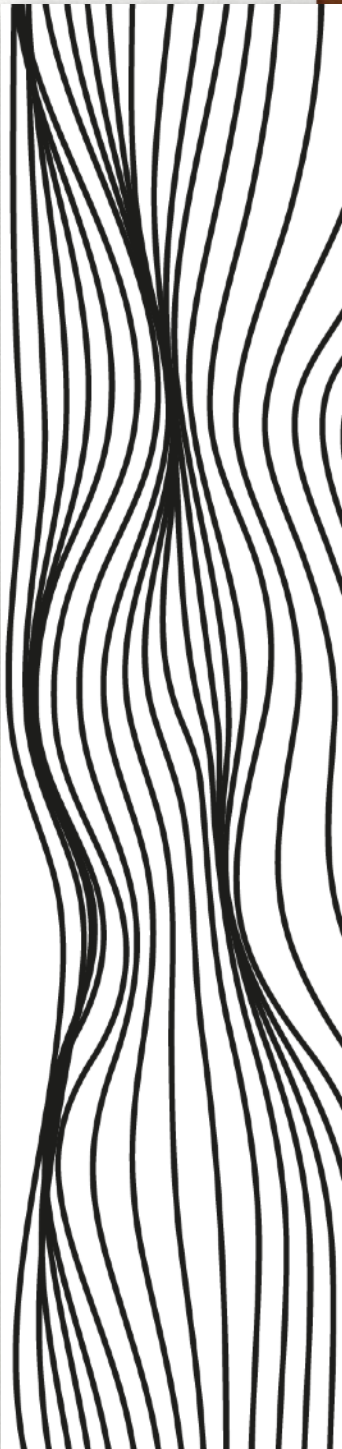
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \simeq \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad \text{com} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

- Vamos estudar agora o que pode ocorrer quando a métrica é quase igual à de Minkowski, a menos de pequenas perturbações (o chamado "***campo fraco***"):

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

onde $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}(t, x^i)$ são ***pequenas perturbações*** ($\ll 1$) da métrica de Minkowski.

- Veremos em seguida que, como consequência das Equações de Campo de Einstein, a métrica (caracterizada aqui em termos das flutuações $h_{\mu\nu}$) adquire um caráter dinâmico, e obedecem a uma Equação de Onda.
- Assim como as ondas eletromagnéticas, essas ondas gravitacionais, uma vez produzidas, podem se propagar no vácuo independentemente da fonte que gerou essas ondas.
- Veremos também que a velocidade dessas ondas é a ***velocidade da luz***.



PERTURBAÇÕES DA MÉTRICA DE MINKOWSKI

- Vamos assumir que as perturbações são muito pequenas, $h_{\mu\nu} \ll 1$, de modo que quaisquer termos de ordem h^2 ou ordens mais altas (com quaisquer índices) podem ser desprezados.
- Portanto, se a métrica é:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

então a *inversa da métrica* é, pela condição de que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, dada por:

$$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad , \quad \text{onde note que } \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \text{e}$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \quad , \quad \text{e aproveitamos também para definir } h^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \quad .$$

- Temos então, pela definição das conexões:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(g_{\beta\mu, \nu} + g_{\beta\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \beta} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(h_{\beta\mu, \nu} + h_{\beta\nu, \mu} - h_{\mu\nu, \beta} \right) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2} \left(h^\alpha_{\mu, \nu} + h^\alpha_{\nu, \mu} - \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu, \beta} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

PERTURBAÇÕES DA MÉTRICA DE MINKOWSKI

- Como acabamos de ver, as conexões Γ são portanto de ordem linear em h :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left(h_{\mu,\nu}^{\alpha} + h_{\nu,\mu}^{\alpha} - \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\beta} \right) + \mathcal{O}(h^2)$$

- Agora, lembre-se que a **curvatura de Riemann** (e portanto o **tensor** e o **escalar de Ricci**) descendem de uma expressão que é essencialmente:

$$R \sim \partial\Gamma + \Gamma \cdot \Gamma \quad ,$$

portanto até **ordem linear em h** as curvaturas só podem herdar os termos $\partial\Gamma$, já que os termos $\Gamma^2 \sim h^2$.

- Até **primeira ordem** em h temos, portanto, de uma expressão derivada anteriormente para o tensor de Ricci, que:

$$R_{\mu\nu} \simeq \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\simeq \partial_{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(h_{\mu,\nu}^{\alpha} + h_{\nu,\mu}^{\alpha} - \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\beta} \right) \right] - \partial_{\nu} \left[\frac{1}{2} \left(h_{\mu,\alpha}^{\alpha} + h_{\alpha,\mu}^{\alpha} - \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\alpha,\beta} \right) \right] + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\simeq -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2)$$

PERTURBAÇÕES DA MÉTRICA DE MINKOWSKI

- Note que a expressão encontrada acima para o tensor de Ricci já **contém a equação de onda**, por meio do termo que é essencialmente o D'Alembertiano da perturbação da métrica:

$$-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(\eta^{00} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right) h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}$$

- Vamos agora escrever o tensor de Einstein e as Equações de Campo de Einstein. Novamente, guardando apenas os termos até primeira ordem em h temos:

$$R \simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \simeq \underbrace{-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}}_{\text{termo 1}} - \underbrace{\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha_\alpha}_{\text{termo 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\mu \eta^{\mu\nu} h^\alpha_\nu}_{\text{termo 3}} + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\nu \eta^{\mu\nu} h^\alpha_\mu}_{\text{termo 4}} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Vamos agora utilizar a notação introduzida acima, fazendo

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \quad , \quad h^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \quad , \quad \text{e introduzindo o } \mathbf{traço} \ h = h^\alpha_\alpha :$$

$$G_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \left(-\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + h^\alpha_{\nu, \mu\alpha} + h^\alpha_{\mu, \nu\alpha} \right) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(-\square h + h^{\alpha\beta}_{, \alpha\beta} \right) + \dots$$

PERTURBAÇÕES DA MÉTRICA DE MINKOWSKI

- Chegamos, assim, a uma expressão para as Equações de Einstein no limite de campo fraco:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad , \quad \text{onde}$$

$$G_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square \right) h + \frac{1}{2} \left(h^\alpha_{\nu, \mu\alpha} + h^\alpha_{\mu, \nu\alpha} \right) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}_{, \alpha\beta} + \dots$$

- Essas equações, em toda a sua glória, teriam de ser resolvidas para todas as 10 componentes independentes de $h_{\mu\nu}$, e para uma configuração de matéria qualquer...!
- O que veremos a seguir é que, assim como no Eletromagnetismo, podemos nos utilizar a **invariância de calibre** para simplificar dramaticamente o nosso problema.
- Lembre-se que, no Eletromagnetismo, podemos escolhendo uma função escalar $\lambda(x)$ qualquer e fazer a transformação de calibre ("gauge"):

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad , \quad \text{que os campos eletromagnéticos permanecem inalterados:}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

A INVARIÂNCIA DE CALIBRE DAS TEORIAS COVARIANTES

- De fato, não devemos nunca nos esquecer de que há uma *invariância fundamental* por trás de toda a idéia de expressar a geometria do espaço-tempo por meio de uma métrica, e por trás do Princípio da Equivalência: a *invariância por transformações arbitrárias de coordenadas* (chamada, no contexto da Relatividade Geral, de *invariância de calibre*, ou *invariância de gauge*.)
- Essa invariância fundamental nos diz que podemos efetuar qualquer mudança no nosso sistema de coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad , \quad \text{onde } \xi^\mu = \xi^\mu(t, \vec{x}) \text{ são funções quaisquer.}$$

- Se a transformação é *infinitesimal*, ou seja, se para qualquer ponto do espaço-tempo a *translação for muito pequena*, temos que, usando um resultado de aulas anteriores, a métrica *no mesmo ponto* se transforma como:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad , \quad \text{onde lembre-se que } \xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$$

- Mas se a nossa métrica é aproximadamente a de Minkowski, então:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}$$

- Ou seja, tanto h quanto ξ são perturbações no mesmo sentido: termos lineares em h são da mesma ordem que termos lineares em ξ , e assim por diante. Portanto, a transformação de coordenadas gera a transformação:

$$h'_{\mu\nu} \simeq h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} + \dots$$

A INVARIÂNCIA DE CALIBRE DAS TEORIAS COVARIANTES

- Note que a métrica “de fundo” é, por hipótese, aproximadamente a de Minkowski.
- Mas há uma infinidade de sistemas de coordenadas relacionados entre si pelas transformações infinitesimais $x \rightarrow x' = x + \xi$. Qualquer um desses é tão bom quanto qualquer outro!
- Evidentemente, a escolha de um referencial particular fixa o “calibre”, no sentido que uma vez que fizemos essa escolha de sistema de coordenadas, renunciamos à opção de redefini-las.
- Mas como é que fixamos esse calibre, na prática? Nesse momento é útil retornar ao exemplo do Eletromagnetismo. Ali, nós não especificamos a função $\lambda(t, \vec{x})$, mas impomos condições diretamente sobre os potenciais. Por exemplo:

$$\text{Gauge de Coulomb: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} \lambda \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \vec{\nabla}^2 \lambda = 0$$

$$\text{Gauge de Lorentz: } \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^\mu = A'^\mu + \partial^\mu \lambda \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu A'^\mu + \square \lambda = 0$$

- Ou seja, na prática nós impomos um **vínculo** que deve ser obedecido pelos potenciais eletromagnéticos. O único cuidado que temos de tomar é que no caso do Eletromagnetismo temos **uma** função livre, portanto podemos impor **uma** condição (vínculo) sobre os A_μ .

A INVARIÂNCIA DE CALIBRE DAS TEORIAS COVARIANTES

- O mesmo vai se passar aqui: não precisamos (nem teríamos como!) especificar quem são as translações infinitesimais ξ que relacionam os diferentes referenciais entre si: basta impor certas condições sobre a métrica — ou melhor, sobre as perturbações da métrica $h_{\mu\nu}$
- Note que no caso da liberdade de gauge da Relatividade Geral temos **quatro funções livres**: ξ^0, ξ^i . Portanto, podemos impor **quatro condições** sobre as 10 componentes do tensor simétrico $h_{\mu\nu}$.
- Vamos retornar à forma do tensor de Einstein no limite de campo fraco:

$$G_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\square\right)h + \frac{1}{2}\left(h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} + h^\alpha_{\mu,\nu\alpha}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Note que podemos fazer **quase todos** esses termos desaparecerem caso pudéssemos impor as condições de gauge:

$$\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$$

- Essa condição chama-se ***gauge harmônico*** ou ***gauge de Lorentz***. Vejamos no que isso dá...

A INVARIÂNCIA DE CALIBRE DAS TEORIAS COVARIANTES

- Usando a condição do gauge harmônico significa impor que:

$$\partial_\alpha h^\alpha_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\alpha h^{\alpha\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h$$

- Vamos substituir essas expressões no tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\simeq -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square \right) h + \frac{1}{2} \left(h^\alpha_{\nu, \mu\alpha} + h^\alpha_{\mu, \nu\alpha} \right) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}_{, \alpha\beta} + \dots \\ &\simeq -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\cancel{\partial_\mu \partial_\nu} - \eta_{\mu\nu} \square \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} h + \frac{1}{2} \cancel{\partial_\nu \partial_\mu} h \right) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h + \dots \end{aligned}$$

- Assim, chegamos à conclusão de que o lado esquerdo das Equações de Einstein ficam escritas, no gauge harmônico, como:

$$G_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2} \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) + \dots = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- Ou seja, as perturbações da métrica obedecem uma equação... de onda!!!

OS CAMPOS E SUAS FONTES

- Definindo a variável $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ temos que as Equações de Einstein se resumem a:

$$G_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} \simeq 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- É útil lembrar o formato das Equações de Maxwell no gauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$):

$$\square A^\mu = -4\pi J^\mu \quad ,$$

cuja solução mais elegante é dada em termos do potencial retardado:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{J^\mu(t - t_R, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad , \quad \text{onde } t_R = \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'| \text{ é o } \textit{tempo retardado}.$$

- Mesmas equações, mesmas soluções:** podemos escrever diretamente que a *solução geral* para as Equações de Campo de Einstein no limite de campo fraco são:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - t_R, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

OS CAMPOS E SUAS FONTES

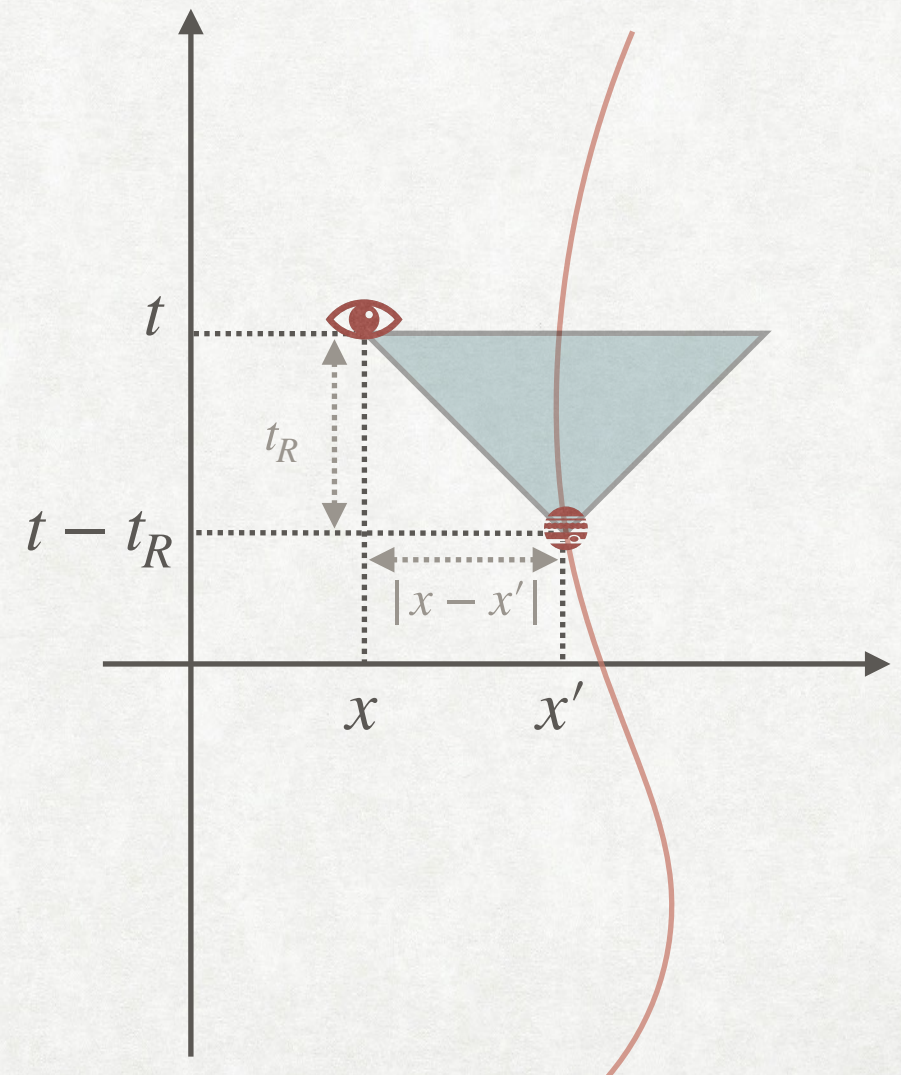
- Vamos recordar o significado físico dessas soluções.
- No caso do Eletromagnetismo, o significado dessa solução é que cargas/correntes (J^μ) são as fontes do campo:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{J^\mu(t - t_R, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad t_R = |\vec{x} - \vec{x}'|$$

- No caso da Relatividade Geral, o mesmo se aplica: as fontes dessas perturbações da métrica são a energia, pressão e estresses da matéria

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - t_R, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- O caráter dessas soluções é tal que elas preservam explicitamente a **causalidade**, por meio do tempo retardado.



OS CAMPOS E SUAS FONTES

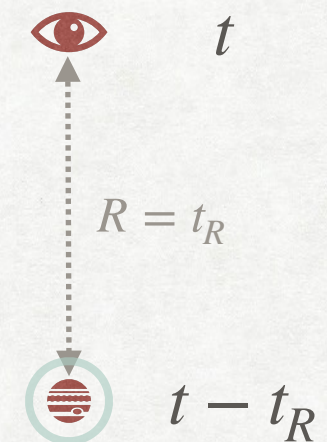
- Essas expressões contêm não apenas as soluções "estáticas" da Eletrostática e da Magnetostática, mas também as ***soluções radiativas***, nas quais uma fonte gera campos dinâmicos que se ***propagam livremente***, "descoladas" das fontes.
- No Eletromagnetismo, ondas são geradas por ***cargas e correntes aceleradas*** e, no vácuo, obedecem:

$$\square A^\mu(t, \vec{x}) = 0$$

- Idem no caso da Relatividade Geral: se "chacoalharmos" as fontes de matéria, podemos gerar ondas gravitacionais que, no vácuo, se propagam de acordo com a equação:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 0$$

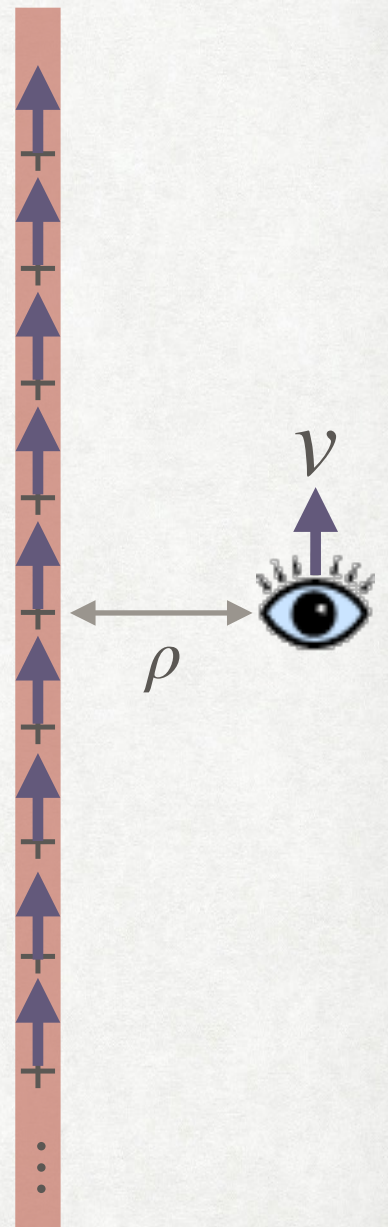
- Ou seja, a Relatividade Geral prevê que podemos ter campos gravitacionais que ***se propagam livremente no vácuo***, "descolados" de qualquer fonte de matéria — ***ondas!***
- Pela equação de onda vemos imediatamente que a velocidade de propagação dessas ondas gravitacionais é a ***velocidade da luz***.



RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

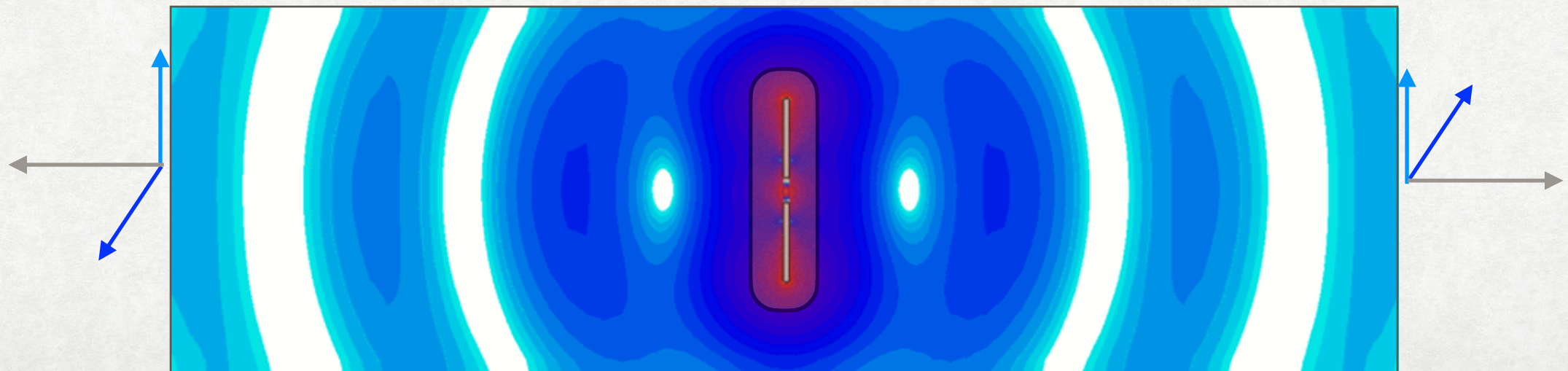
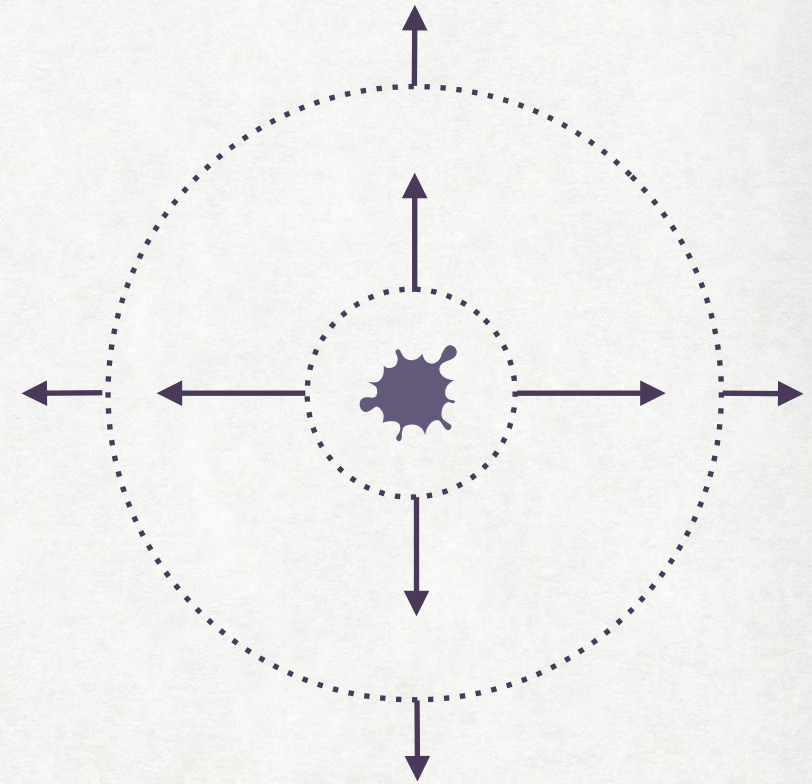
- No Eletromagnetismo as soluções radiativas exigem que as fontes sejam *aceleradas*: afinal, uma carga com velocidade uniforme gera um *campo eletrostático* num referencial em que as cargas estão estacionárias. No caso explorado nas Aulas 8 e 9, temos que, em ambos os referenciais:

$$\vec{E} \sim \vec{E}' \sim \frac{1}{\rho} \hat{\rho}$$



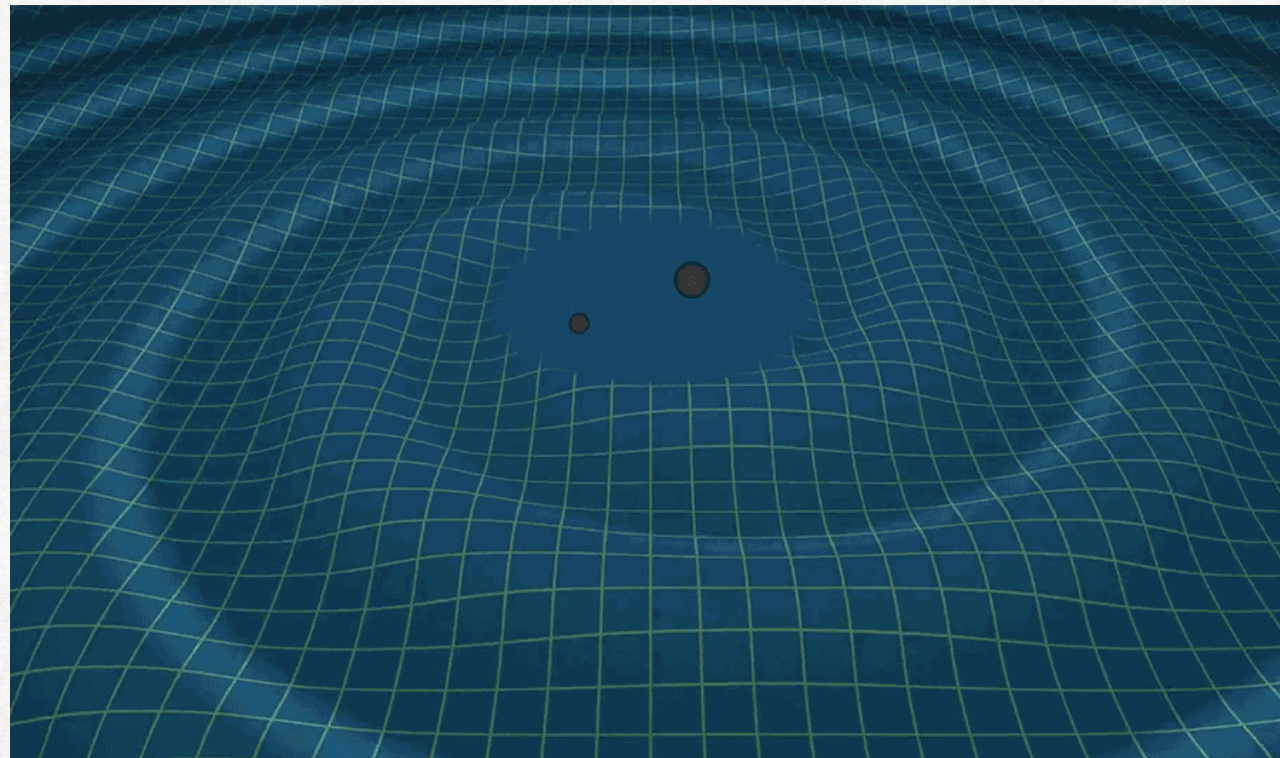
RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

- Para uma configuração limitada a um determinado volume no espaço, os campos estáticos $\vec{E}_{Stat}$ e $\vec{B}_{Stat}$ decaem como $\sim 1/r^2$
- Mas quando temos *cargas aceleradas*, os campos se desprendem das fontes e se propagam de modo independente. Nesse caso, os campos "de radiação" decaem mais devagar, como $E_{Rad} \sim B_{Rad} \sim 1/r$



RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

- No Relatividade Geral, ondas gravitacionais são geradas pela aceleração de fontes de matéria/energia. Agora a radiação de dipolo elétrico não é algo realístico: uma situação mais "normal" seria de duas massas que orbitam uma a outra:



- Porém, ao contrário do Eletromagnetismo, no qual existem cargas positivas e negativas, na Relatividade Geral temos apenas *massas e energias positivas*. Então, o caráter dessas ondas será um pouco diferente do caso dos campos eletromagnéticos. Nas próximas aulas vamos explorar melhor essas similaridades e diferenças entre as ondas gravitacionais e as ondas eletromagnéticas.

PARA A AULA QUE VEM:

- Terminem o quanto antes a 4a Lista de Exercícios !
- A 5a Lista de Exercícios estará disponível nos próximos 2-3 dias
- Leitura para a próxima aula: S. Carroll, Capítulo 7