Iteração de Ponto Fixo

Parte V: o caso multivariado

Elias S. Helou Neto

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- A matriz jacobiana $J\phi$ é contínua
- $\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{x})$ é ponto fixo com

$$\|J\phi(\boldsymbol{x})\| < 1$$

  para alguma norma tal que $\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\|\boldsymbol{x}\|$
- $\boldsymbol{x}_{k+1} = \phi(\boldsymbol{x}_k)$
- $\boldsymbol{x}_0$ está suficientemente próximo de $\boldsymbol{x}$

então

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}.$$

Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e defina

$$g(t) := f\left(\boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right)$$

para um par qualquer fixo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Podemos utilizar o teorema do valor médio para escrever

$$g(1) - g(0) = g'(\eta)$$

para algum $\eta \in (0, 1)$.

Podemos utilizar o teorema do valor médio para escrever

$$g(1) - g(0) = g'(\eta)$$

para algum $\eta \in (0, 1)$. Como

$$g(1) = f(\boldsymbol{x}), \quad g(0) = f(\boldsymbol{y}) \quad \text{e}$$
$$g'(\eta) = \nabla f\left(\boldsymbol{y} + \eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

Podemos utilizar o teorema do valor médio para escrever

$$g(1) - g(0) = g'(\eta)$$

para algum $\eta \in (0, 1)$. Como

$$g(1) = f(\boldsymbol{x}), \quad g(0) = f(\boldsymbol{y}) \quad \text{e}$$
$$g'(\eta) = \nabla f\left(\boldsymbol{y} + \eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

então

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

onde $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{y} + \eta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$.

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Considere uma iteração $\boldsymbol{x}_k$ qualquer, então o resultado acima implica que

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) - \phi_i(\boldsymbol{x}_k) = \nabla\phi_i(\boldsymbol{\xi}_{ik})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Em notação compacta

$$\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}_k) = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(\xi_{1,k})^T \\ \nabla\phi_2(\xi_{2,k})^T \\ \nabla\phi_3(\xi_{3,k})^T \\ \vdots \\ \nabla\phi_n(\xi_{n,k})^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Denotamos:

$$\tilde{J}\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(\xi_1)^T \\ \nabla\phi_2(\xi_2)^T \\ \nabla\phi_3(\xi_3)^T \\ \vdots \\ \nabla\phi_n(\xi_n)^T \end{pmatrix}$$

Iteração de Ponto Fixo
Prova de Convergência

Assim:

$$\phi(\boldsymbol{x}_k) - \phi(\boldsymbol{x}) = \tilde{J}\phi(\boldsymbol{\xi}_{1,k}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n,k})(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x})$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Portanto:

$$\left\|\phi(\boldsymbol{x}_k) - \phi(\boldsymbol{x})\right\| \leq \left\|\tilde{J}\phi(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{n,k})\right\| \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|$$

Como as derivadas parciais e a norma são contínuas

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \epsilon > 0$$

tal que

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{x}\right\| \leq \epsilon \Rightarrow \\ &\qquad \left\|\tilde{J}\phi(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n)\right\| \leq \left\|J\phi(\boldsymbol{x})\right\| + \delta.\end{aligned}$$

Em particular, podemos utilizar

$$\delta = \frac{1 - \left\|J\phi(\boldsymbol{x})\right\|}{2} > 0.$$

Iteração de Ponto Fixo
Prova de Convergência

Ou seja, $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{x}\| \leq \epsilon \Rightarrow \left\|\tilde{J}\phi(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n)\right\| \leq c$$

onde

$$c = \left\|J\phi(\boldsymbol{x})\right\| + \frac{1 - \left\|J\phi(\boldsymbol{x})\right\|}{2} < 1.$$

Recordemo-nos que

$$\left\|\phi(\boldsymbol{x}_k) - \phi(\boldsymbol{x})\right\| \leq \left\|\tilde{J}\phi(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{n,k})\right\| \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|.$$

Ou seja

$$\left\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}\right\| \leq \left\|\tilde{J}\phi(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{n,k})\right\| \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|.$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Mas se $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| \leq \epsilon$

$$\left\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}\right\| \leq c\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|.$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Mas se $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq \epsilon$

$$\left\|\mathbf{x}_{k+n} - \mathbf{x}\right\| \leq c^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|.$$

Iteração de Ponto Fixo

Prova de Convergência

Note que

$$\left\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}\right\| \leq \left\|\tilde{J}\phi(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{n,k})\right\| \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|$$

implica em

$$\frac{\left\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}_{k} - \boldsymbol{x}\right\|} \leq \left\|\tilde{J}\phi(\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{n,k})\right\|.$$

Aplicando limites

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\left\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\right\|} \leq \left\|J\phi(\boldsymbol{x})\right\|.$$

Iteração de Ponto Fixo

Acelerando a Convergência

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Rightarrow \left\| J\psi(\boldsymbol{x}) \right\| = 0$$

Iteração de Ponto Fixo

Acelerando a Convergência

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Rightarrow J\psi(\boldsymbol{x}) = 0$$

Definindo

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + A(\boldsymbol{x})\big(\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}\big)$$

Definindo

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + A(\boldsymbol{x})\big(\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}\big)$$

$$\det\big(A(\boldsymbol{x})\big) \neq 0$$

temos

$$J\psi(\boldsymbol{x}) = I + A(\boldsymbol{x})\big(J\phi(\boldsymbol{x}) - I\big) + \Omega(\boldsymbol{x})$$

onde

$$\Omega(\boldsymbol{x})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\big(\phi_k(\boldsymbol{x}) - x_k\big).$$

Portanto, em um ponto fixo a exigência fica

$$0 = I + A(\boldsymbol{x})\big(J\phi(\boldsymbol{x}) - I\big)$$

que é satisfeita com

$$A(\mathbf{x}) = -\left(J\phi(\mathbf{x}) - I\right)^{-1}.$$

Portanto

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \big(J\phi(\boldsymbol{x}) - I\big)^{-1}\big(\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}\big).$$

Note que essa formulação faz sentido sempre que

$$\det\big(J\phi(\boldsymbol{x}) - I\big) \neq 0.$$

Iteração de Ponto Fixo

Algoritmo Acelerado

- Resolva
$$\big(J\phi(\boldsymbol{x}_k) - I\big)\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{x}_k - \phi(\boldsymbol{x}_k).$$
- Faça
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{s}_k.$$