

Iteração de Ponto Fixo

Parte IV: o caso multivariado

Elias S. Helou Neto

Motivação

Menor Distância a uma Superfície

Considere uma superfície

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \gamma(x_1, x_2))^T : (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2\}.$$

Determine numericamente o ponto de Γ mais próximo da origem.

Motivação

Menor Distância a uma Superfície

Note que a distância da origem a um ponto de Γ é dada por

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \gamma(x_1, x_2)^2},$$

cujo gradiente é:

$$\nabla d(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \gamma(x_1, x_2)^2}} \begin{pmatrix} x_1 + \gamma(x_1, x_2) \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ x_2 + \gamma(x_1, x_2) \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Motivação

Menor Distância a uma Superfície

A tarefa agora é resolver $\nabla d(x_1, x_2) = (0, 0)^T$, ou seja

$$-\begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_2) \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \gamma(x_1, x_2) \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Motivação

Menor Distância a uma Superfície

Introduzindo a notação compacta para vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

podemos reescrever o problema como

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

onde

$$\phi(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x})\nabla\gamma(\mathbf{x}).$$

Equação de Ponto Fixo

Definição

Em geral, podemos desejar resolver equações da forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

onde

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Definição

Iteração de Ponto Fixo

Qual será o comportamento das iterações

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k)?$$

Matriz Jacobiana

Definição

Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Matriz Jacobiana

Definição

Definimos a matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}$:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Matriz Jacobiana

Definição

Observe que

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x})^T \\ \nabla f_2(\mathbf{x})^T \\ \nabla f_3(\mathbf{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x})^T \end{pmatrix}.$$

Norma

Definição

► $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Norma

Definição

- ▶ $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$

Norma

Definição

- ▶ $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$
- ▶ $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Norma

Propiedades

► $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

Norma

Propiedades

► $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

► $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$

Norma

Exemplos

$$\blacktriangleright \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Norma

Exemplos

$$\blacktriangleright \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\blacktriangleright \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Norma

Exemplos

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$$

Norma

Exemplos

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$$

$$\triangleright \|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Norma

Matrizes

Consideremos uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

qual seria a noção apropriada de tamanho?

Norma

Matrizes

Uma ideia é definir $\|A\| := \|\mathbf{a}\|$ onde

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,n} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,1} \\ a_{m,2} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Norma

Matrizes

Uma outra ideia é utilizar

$$\|A\| := \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Norma

Matrizes

Observe que

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\|$$

portanto

$$\|A\| := \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

Norma

Matrizes

A norma

$$\|A\| := \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

satisfaz

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- ▶ A matriz jacobiana $J\phi$ é contínua

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- ▶ A matriz jacobiana $J\phi$ é contínua
- ▶ $\mathbf{x}$ é ponto fixo com

$$\|J\phi(\mathbf{x})\| < 1$$

para alguma norma tal que $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- ▶ A matriz jacobiana $J\phi$ é contínua
- ▶ $\mathbf{x}$ é ponto fixo com

$$\|J\phi(\mathbf{x})\| < 1$$

para alguma norma tal que $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$

- ▶ $\mathbf{x}_0$ está suficientemente próximo de $\mathbf{x}$

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- ▶ A matriz jacobiana $J\phi$ é contínua
- ▶ $\mathbf{x}$ é ponto fixo com

$$\|J\phi(\mathbf{x})\| < 1$$

para alguma norma tal que $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$

- ▶ $\mathbf{x}_0$ está suficientemente próximo de $\mathbf{x}$

então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}.$$

Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Além disso,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|} \leq \|J\phi(\mathbf{x})\|.$$

Norma-1

Matrizes

Note que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix},$$

portanto

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right|.$$

Norma-1

Matrizes

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|\end{aligned}$$

Norma-1

Matrizes

Seja $M = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$, então

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\|_1 &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| M = M\end{aligned}$$

pois $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$.

Norma-1

Matrizes

Ou seja,

$$\|A\|_1 \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

Norma-1

Matrizes

Agora sejam

$$J = \operatorname{argmax}_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

e $\mathbf{x}$ tal que

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq J \\ 1 & \text{se } j = J \end{cases}.$$

Então $\|\mathbf{x}\| = 1$ e

$$\|A\|_1 \geq \|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_{i,J}| = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

Norma-1

Matrizes

Portanto mostramos que

$$\|A\|_1 \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$$

e

$$\|A\|_1 \geq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

Norma- ∞

Matrizes

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\|_{\infty} &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\end{aligned}$$

Norma-1

Critério das Colunas

O critério $\|J\phi(\mathbf{x})\|_1 < 1$ resulta em

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| < 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Norma- ∞

Critério das Linhas

O critério $\|J\phi(\mathbf{x})\|_\infty < 1$ resulta em

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| < 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$