Exercícios sobre integral de linha de campos escalares e de campos vetoriais

(I) Calcule as seguintes integrais de linha de campo escalar:

(1) $\int_\gamma (x+y)ds$, sendo γ o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

(2) $\int_\gamma x ds$, sendo γ o arco de parábola $y = x^2$, de $(-2,4)$ a $(1,1)$.

(3) $\int_\gamma xy ds$, γ o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 9$ que está no primeiro quadrante.

(II) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, sendo:

(1) Em $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}$, e γ o segmento de reta orientado da extremidade $(0,0,0)$ para a extremidade $(1,1,1)$.

(2) Em $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$, γ o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$, com $y \geq 0$, e sentido horário.

(III) Calcule:

(1) $\int_\gamma xdx + ydy + zdz$, γ a interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, orientada de maneira que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

(2) $\int_\gamma 2xdx - 3ydy + z^2dz$, γ o segmento de reta unindo os pontos $A = (1,0,0)$ e $B = (0,1,3)$, de A para B.

(3) $\int_\gamma \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, γ a circunferência $x^2+y^2 = a^2$, $a > 0$, percorrida no sentido horário.

(4) $\int_\gamma \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$, γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$, e $y = x^2$, percorrida no sentido anti-horário.

(III) Prove que o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo x.