Cônicas

Cônicas (definição)

Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, chama-se cônica o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ que satisfazem uma equação do segundo grau $g(x,y)=0$, em que:

$$g(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

$$\therefore \quad Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Dizemos que $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ é uma equação da cônica, sendo:

- Ax^2, By^2 os termos quadráticos
- Cxy o termo misto
- Dx e Ey os termos lineares
- F o termo independente

Queremos classificar todas as formas cônicas, isto é: dada uma forma quadrática, determinar o lugar geométrico que ela representa. Essa tarefa nem sempre é simples, devido a complexidade que a equação das cônicas assumem. Para facilitar essa tarefa podemos aplicar às cônicas translações e/ou rotações para encontrar uma equação em um novo sistema de coordenadas, eliminando os termos lineares e/ou termo misto, respectivamente. Com isso, a equação da cônica assume uma nova forma, facilitando a tarefa de determinação do lugar geométrico.

Translação e eliminação dos termos lineares

Uma importante aplicação da translação é para podermos encontrar um novo sistema de coordenadas $x'y'$, tal que a forma cônica

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

assuma a forma:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + F' = 0$$

e, desta forma, eliminando-se os termos lineares da equação.

Exemplo:

Encontrar um sistema coordenado $x'y'$ de tal maneira que a equação (em coordenadas xy)

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$$

não possua termos lineares.

Aplicando translação, temos:

$$(x'+h)^2 + 2(y'+K)^2 - 4(x'+h) - 4(y'+K) - 1 = 0$$

$$x'^2 + 2hx' + h^2 + 2(y'^2 + 2Ky' + K^2) - 4x' - 4h - 4y' - 4K - 1 = 0$$

$$x'^2 + 2y'^2 + (2h-4)x' + (4K-4)y' + h^2 + 2K^2 - 4h - 4K - 1 = 0$$

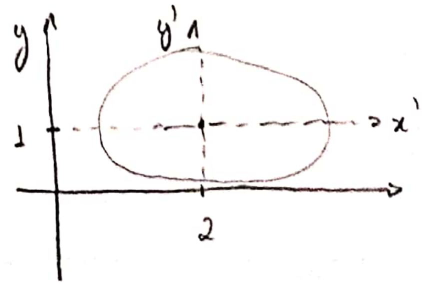
Para eliminar os termos lineares da equação, precisamos encontrar valores de h e K, tal que:

$$\begin{cases} 2h - 4 = 0 \\ 4K - 4 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{matrix} h = 2 \\ K = 1 \end{matrix} \qquad (2, 1)$$

$$x'^2 + 2y'^2 + 0x' + 0y' + 2^2 + 2(1)^2 - 4(2) - 4(1) - 1 = 0$$

$$x'^2 + 2y'^2 - 7 = 0$$

$$\frac{x'^2}{7} + \frac{y'^2}{7/2} = 1$$



Uma outra maneira:

$$x^2 - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 2y + 1) - 1 - 4 - 2 = 0$$

$$(x-2)^2 + 2(y-1)^2 - 7 = 0$$

Aplicando a translação, temos:

$$\underline{\underline{x'^2 + 2y'^2 - 7 = 0}}$$