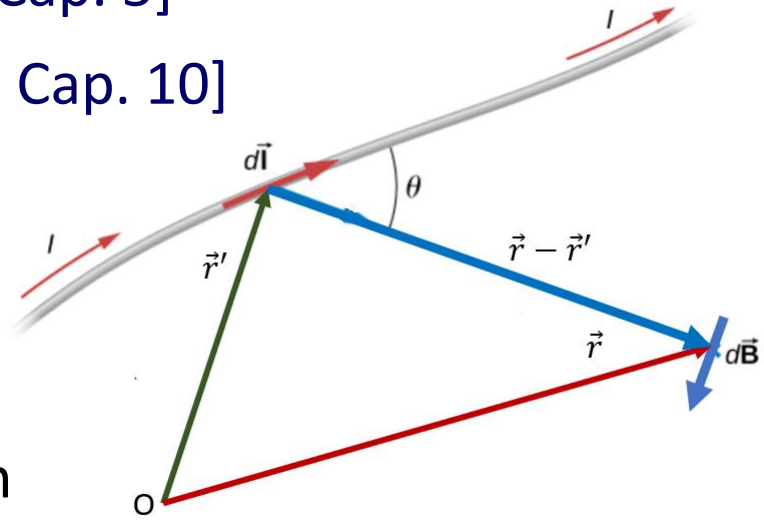
# Campos Magnetostáticos I

[R. Fitzpatrick, Classical Electromagnetism; Cap. 5]

[J.D. Jackson, Classical Electrodynamics; Cap. 5]

[A. Zangwill, Electromagnetic Field Theory; Cap. 10]

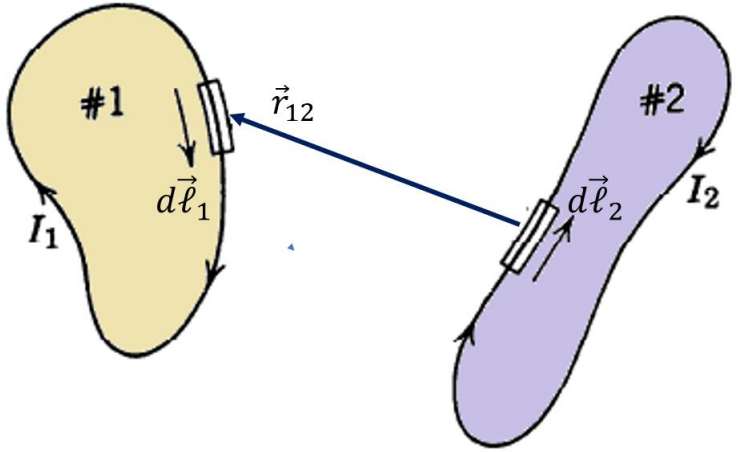



## Lei de Biot-Savart

$$d\vec{B}(\vec{r}) = kI\,\frac{d\vec{\ell}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3};\, k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}$$

"Problema" aparente: não satisfação da Terceira Lei de Newton

Formulação de Ampère: força de interação entre duas espiras de corrente




$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{d\vec{\ell}_1\times\left(d\vec{\ell}_2\times\vec{r}_{12}\right)}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Força na espira 1 devido ao campo produzido por $I_2$

$$\vec{F}_{12} = I_1 \oint d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}; \;\; \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint d\vec{\ell}_2 \times \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 \times \left(d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{12}\right) = -\left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2\right)\vec{r}_{12} + \left(d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{r}_{12}\right) d\vec{\ell}_2$$

$$\therefore \;\; \vec{F}_{12} = -kI_1I_2 \oint \oint \frac{\left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2\right)\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} + kI_1I_2 \oint d\vec{\ell}_2 \oint d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Mas

$$\oint d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} = -\oint d\vec{\ell}_1 \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} = -\int \left[\nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{r}_{12}|}\right] . d\vec{S} = 0$$

Portanto

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2\right) \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}}$$

Intercâmbio $1 \leftrightarrows 2 \implies \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

## Campo produzido por uma distribuição contínua de corrente

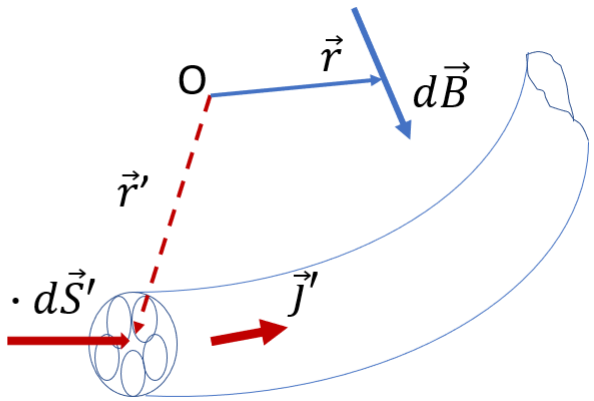
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dI' \int d\vec{\ell}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}; dI' = \vec{j}' \cdot d\vec{S}' = j'\hat{e}_\ell \cdot d\vec{S}'; \;\; dV' = d\vec{\ell}' \cdot d\vec{S}'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

## Equações diferenciais

Campo produzido por corrente estacionárias ($\partial/_{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \nabla \cdot \vec{j} = 0$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$




$$\left[\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = f\nabla \times \vec{A} + \nabla f \times \vec{A}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}); \; \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'; \; \nabla \cdot \vec{B} = 0; \; \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\nabla' \cdot \vec{j}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV'$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

<u>Força e Torque na interação campo-corrente</u>

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV; \quad \vec{\tau} = \int \vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right) dV$$

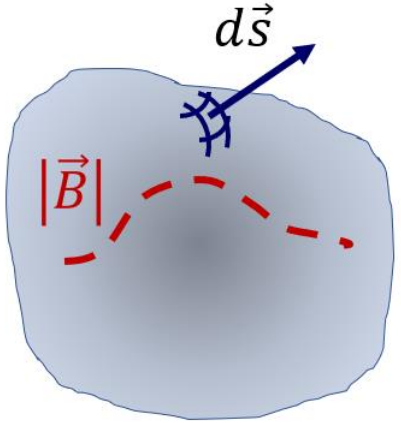
<u>Teorema de Thomson</u>

Em uma região livre de correntes, o módulo do campo magnético pode ter um mínimo local, mas não máximo.

Condição para máximo dentro do volume: $\int d\vec{S} \cdot \nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right) < 0$

$$\int d\vec{S} \cdot \nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right) = \int dV \nabla \cdot \nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right) = 2\vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) + 2\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B} = 2\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B}$$



$$\nabla \cdot \nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right) = 2\nabla \cdot \left[\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B}\right] = 2\sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) B_j$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_j}{\partial x_i} = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \quad \therefore \nabla \cdot \nabla\left(\vec{B} \cdot \vec{B}\right) = 2\left[\sum_j \sum_i \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)^2 + \sum_i B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial B_j}{\partial x_j}\right]$$

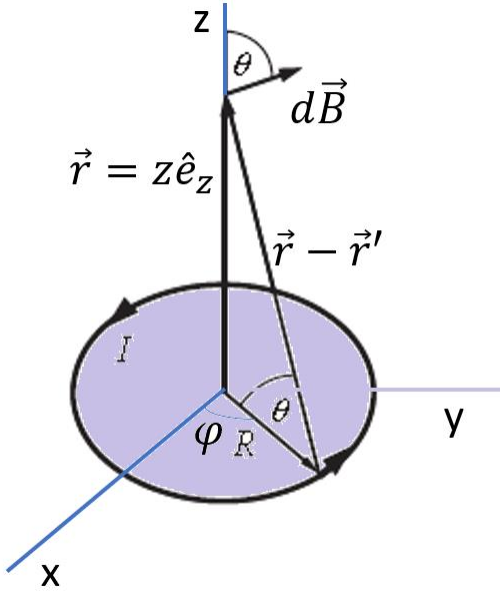
$$\int d\vec{S} \cdot \nabla B^2 = 2\sum_{i,j} \int \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)^2 dV \ \geq 0$$

Portanto o campo magnético só pode ter um mínimo dentro da região, o que faz sentido físico, já que as fontes do campo são externas.

## Campo de uma espira de corrente [Zangwill, Seção 10.4]

1. Campo ao longo do eixo *z* (Física III)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}|^3}$$




$$\vec{r} = z\hat{e}_z;\;\; \vec{r}' = R\hat{e}_r = R\left(\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y\right);$$

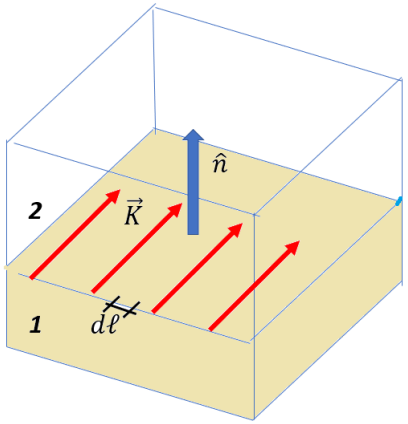
$$d\vec{\ell} = Rd\varphi\left(-\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y\right)$$

$$d\vec{\ell}\times(\vec{r}-\vec{r}') = \left[zR\cos\varphi\,\hat{e}_x + zR\sin\varphi\,\hat{e}_y + R^2\hat{e}_z\right]$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{e}_z$$

2. Condições de contorno para o campo magnético

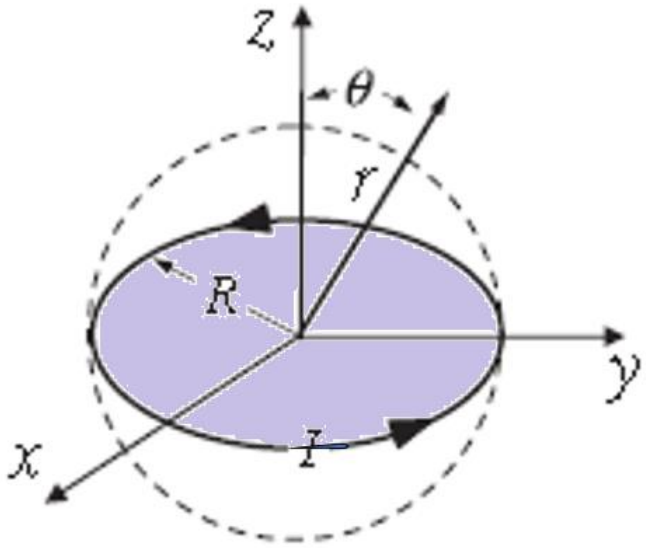



$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right) = 0;\;\; \hat{n}\times\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right) = \mu_0\vec{K}$$

3. Potencial escalar magnético

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \;\rightarrow\; \vec{B}(\vec{r}) = -\nabla\psi(\vec{r});\; \nabla \cdot \vec{B} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2\psi(\vec{r}) = 0$$

4. Campo da espira de corrente fora do eixo vertical




Consideremos uma esfera de raio $R$ passando pela espira.

Como há simetria azimutal, as expressões para o potencial escalar nas duas regiões dentro e fora a esfera são

$$\psi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell} A_\ell \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) \\ \displaystyle\sum_{\ell} B_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta) \end{cases}$$

Usamos agora o princípio, já visto, que esta é a solução geral da Equação de Laplace, em coordenadas esféricas. Portanto, conhecendo a solução ao longo do eixo $z$, podemos estendê-la para qualquer ângulo $\theta$ usando esta forma geral.

Ao longo do eixo vertical

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{e}_z = -\frac{d\psi}{dz} \hat{e}_z$$

$$\therefore \quad \psi(z) = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2R} \frac{z}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}}$$

Função geradora para os polinômios de Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Portanto

$$\psi(z) = -\frac{\mu_0 I}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{\ell+1}}{R^{\ell+1}} P_\ell(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^\ell P_{\ell-1}(0); \ell P_{\ell-1}(0) = -(\ell + 1) P_{\ell+1}(0)$$

Esta expressão tem que ser igual a solução geral para $r = z;\ \ \theta = 0$.

Como $P_\ell(1) = 1$, temos

$$A_\ell = -\frac{\mu_0 I}{2} P_{\ell-1}(0)$$

Como $P_\ell(0) = 0;\ \ell$ impar, somente os coeficientes com $\ell$ impar não serão nulos; portanto

$$\psi(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2} \sum_{\ell=1,3,..}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_{\ell-1}(0) P_\ell(\cos\theta);\ \ r < R$$

Para obter a solução para $r > R$, devemos impor que, em $r = R$, a componente normal de $\vec{B}$ seja contínua, ou seja, $\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r<R} = \left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r>R}$. Derivando as expressões gerais para o potencial, nas duas regiões, obtemos a relação entre os coeficientes, $(\ell+1)B_\ell = -\ell A_\ell$. Portanto

$$\psi(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2} \sum_{\ell=1,3,..}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell+1}(0) P_\ell(\cos\theta);\ \ r > R$$

Exercício para os alunos: calcular a expressão para os campos e verificar o quê acontece sobre a espira.