ANALISE COMBINATORIA

Programa Pró-Ciência
Fapesp/IME-USP-setembro de 1999

Considere a seguinte situação: um conjunto A contem objetos de diversos tipos distintos, digamos, tipo 1, tipo 2, $\cdots$ tipo k. Se conhecemos o número de objetos de cada tipo então o número total de objetos em A é, pelo princípio da adição, a soma do número de objetos de cada um dos tipos. Em particular, se o número de objetos é o mesmo para todos os tipos, então o número de objetos em A é, evidentemente, o produto desse número pela quantidade de tipos existentes. Inversamente, se o número total n de objetos em A e o número m de objetos de cada tipo é conhecido então o *número de tipos distintos* é $k = \frac{n}{m}$. Ocorre que, em muitas situações, estamos de fato interessados em calcular exatamente o número de tipos distintos de objetos e esta observação simples é muito útil.

Antes de considerar alguns exemplos, vamos reescrever essas observações de forma ligeiramente distinta. Indiquemos por $|A|$ o número de objetos de um conjunto A qualquer. Se $A = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \cdots \dot\cup A_k$, $|A| = n$ e $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_k| = m$ então $k = \frac{n}{m}$.

Em muitos casos, essa situação ocorre quando definimos em A uma *relação de equivalência*, isto é, passamos a não mais distinguir os elementos de A em cada subconjunto A_i, $i = 1 \cdots k$. (veja figura 1).

Consideremos agora dois exemplos

Exemplo 1 Qual é o número de rodas de ciranda distintas que podem ser formadas com 7 crianças?

Neste exemplo temos 7! *filas* de crianças. Entretanto, quando organizadas em um círculo, duas filas formam a mesma roda de ciranda (são 'equivalentes') se houver coincidência das crianças após uma rotação de uma das rodas. De fato, temos 7 filas distintas para uma mesma roda de ciranda. Portanto o número dessas rodas é $\frac{7!}{7} = 6!$.

Exemplo 2

Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Se as 10 letras fossem todas diferentes, uma aplicação simples do princípio da multiplicação daria 10! anagramas.

Entretanto, podemos permutar os 2 T os 2 M e, ignorando o acento, também os 3 A. Isto significa que estamos contando cada anagrama 2!2!3! vezes. Portanto existem $\frac{10!}{2!2!3!}$ anagramas distintos.

Exemplo 3 Quantas são as maneiras distintas de pintar os lados de um quadrado, usando duas cores e considerando equivalentes duas 'pinturas' se existir uma rotação que faz coincidir as cores?.

Aqui podemos usar um argumento semelhante para contar as formas distintas de colorir os lados do quadrado. Observe, entretanto, que as 'classes de equivalência' não têm mais o mesmo número de elementos.

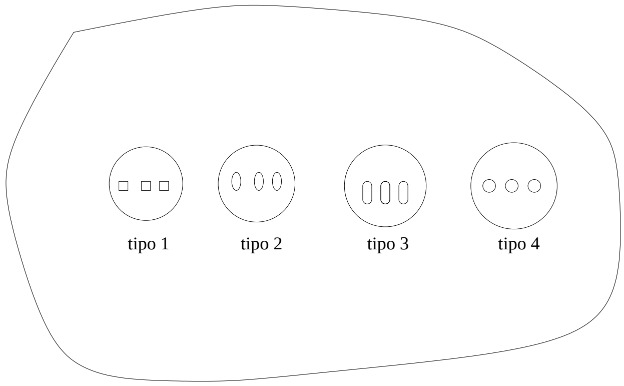

Figura 1:

Uma classe especial muito importante de problemas para os quais o argumento acima pode ser aplicado está ilustrada abaixo.

Problema A Em uma classe com n alunos, quantas filas de comprimento m ($m \leq n$) podem ser formadas?

Problema B Usando um alfabeto de n símbolos, quantas 'palavras' distintas de tamanho m ($m \leq n$) podem ser formadas sem permitir repetição de simbolos?

Problema C O conjunto A possui m elementos e o conjunto B possui n elementos ($m \leq n$). Quantas são as funções $f : A \to B$ injetoras?

Problema D De quantas maneiras é possível colocar m bolas distintas em n urnas, se cada urna contem apenas uma bola?

Observe que

- Esses problemas podem ser resolvidos facilmente usando os princípios básicos.
- Eles são todos 'equivalentes'

Pergunta: Você acha que vale a pena dar um nome especial para problemas de contagem do tipo acima?

Considere agora os seguintes problemas:

Problema A' Em uma classe com n alunos, quantas comissões de tamanho m ($m \leq n$) podem ser formadas?

Problema C' O conjunto B possui n elementos. Quantos são os subconjuntos de B com m elementos? ($m \leq n$).

Problema D' De quantas maneiras é possível colocar m bolas indistinguíveis em n urnas se cada urna contem apenas uma bola?

Como se pode perceber, o que fizemos foi modificar os problemas anteriores, de uma certa maneira. O que mudou exatamente? Como seria uma 'tradução' do problema B? Ainda é possível resolvê-los usando apenas os principios básicos?

Para terminar vamos considerar mais dois exemplos:
Exemplo 3 Quantas comissões de 4 alunos podem ser formadas numa classe de 7 alunos?
Exemplo 4 De quantas maneiras distintas podemos colocar 3 bolas em 5 urnas se duas delas são indistinguíveis?

Problemas

1. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.
   (a) Quantas comissões podem ser formadas? *R.* 560.
   (b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher? *R.* 434.
2. Quantas diagonais possui um polígono de n lados? *R.* $\frac{n(n-3)}{2}$.
3. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e do dígito 8 figura exatamente 2 vezes? *R.* 12960.
4. De quantos modos podemos dividir 20 pessoas:
   (a) em dois grupos de 10? *R.* $\frac{C_2^{10}0}{2}$.
   (b) em quatro grupos de 5? *R.* $\frac{C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5}{4!}$.
   (c) em um grupo de 12 e um grupo de 8? *R.* C_{20}^{12}.
   (d) em tres grupos de 6 e um grupos de 2? *R.* $\frac{C_{20}^6 \times C_{14}^6 \times C_8^6}{3!}$.
5. Quantos são os subconjuntos com p elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ nos quais:
   (a) a_1 figura? *R.* C_{n-1}^{p-1}
   (b) a_1 não figura? *R.* C_{n-1}^{p}
   (c) a_1 e a_2 figuram? *R.* C_{n-2}^{p-2}
   (d) Pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura? *R.* $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_n^p - C_{n-2}^p$.
   (e) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura? *R.* C_{n-2}^{p-1}

6. Considere $n(n > 2)$ pontos em um plano, entre os quais não há 3 pontos colineares.

   (a) Quantas são as retas que contêm dois desses pontos? *R.* C_n^2

   (b) Qual é o número máximo de pontos de interseção dessas retas? *R.* $\frac{n^4-6n^3+11n^2+2n}{8}$.

7. Sejam $I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ estritamente crescentes? *R.* C_n^m

8. O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f : A \to B$ sobrejetoras para:

   (a) p=n; *R.* $n!$

   (b) p= n+1; *R.* $\frac{(n+1)!n}{2}$

   (c) p=n+2. *R.* $\frac{(n+2)!n(3n+1)}{24}$

9. No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra "MATEMATICA", partindo de M e indo sempre para a direita ou para baixo?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & M \\
 & & & & & & & & M & A \\
 & & & & & & & M & A & T \\
 & & & & & & M & A & T & E \\
 & & & & & M & A & T & E & M \\
 & & & & M & A & T & E & M & A \\
 & & & M & A & T & E & M & A & T \\
 & & M & A & T & E & M & A & T & I \\
 & M & A & T & E & M & A & T & I & C \\
M & A & T & E & M & A & T & I & C & A
\end{array}
$$

   R. 512

10. De quantos modos n crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que duas dessas crianças permaneçam juntas? *R.* $2(n-2)!$ E de modo que p $(p < n)$ dessas crianças permaneçam juntas? *R.* $p! \times (n-p)!$.

11. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher? *R.* $(n-1)! \times 2^n$

12. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em um lugar que os oferece em 7 sabores? *R.* 210

13. Quantas são as soluções inteiras positivas da equação $x + y + z = 10$? *R.* 36.

14. $I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ não decrescentes? *R.* $\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}$